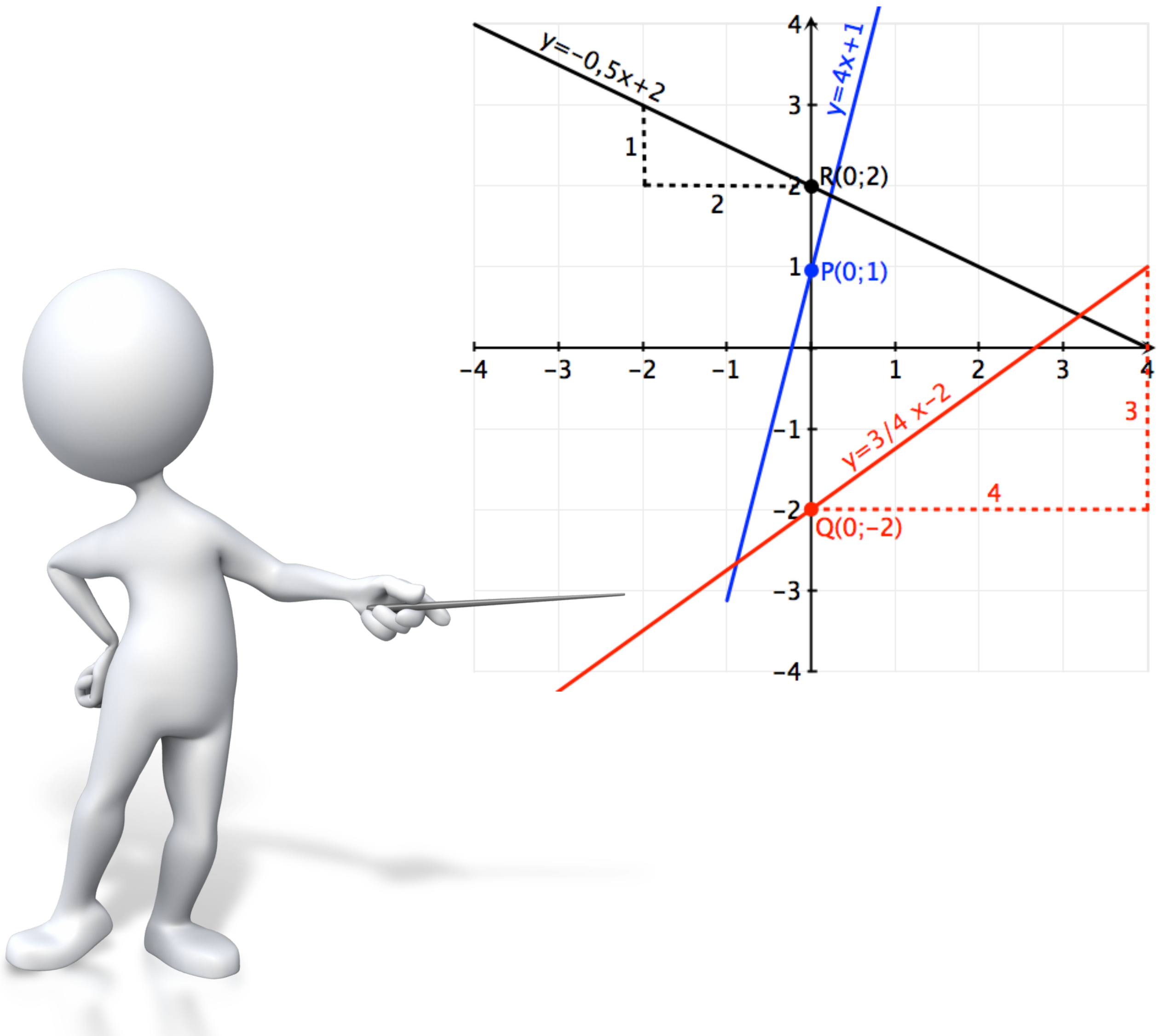
Lineare Funktionen

Skript
Beispiele
Musteraufgaben
Übungsaufgaben
Übungs-Klassenarbeiten



Impressum

Mathefritz Verlag
Jörg Christmann
Pfaffenkopfstr. 21E
66125 Saarbrücken

verlag@mathefritz.de
www.mathefritz.de

Autoren

Dr. Jürgen A. Schmidt
Jörg Christmann

Nutzungsbedingungen

Inhalt

1 Zuordnungen

1.1 Beispiele von Zuordnungen

Beispiel 1:
Lars kauft beim Obsthändler Walnüsse. Ein Kilogramm kostet 4 €.
Wie viel kosten 200 g, 500g, 1,2 kg?

Beispiel 2:
In einem Parkhaus kostet das Parken pro angefangener halben Stunde jeweils 1 €. Ab der 2. Stunde kostet die halbe Stunde nur noch 0,75 €. Länger als 4 Stunden
Parken kostet pauschal 7,50 €.
Berechne jeweils die Parkgebühr für 10 min, für 50 min, für 2h 20 min, für 6 h 15 min.

Beispiel 3:
Zum Frühstück am Sonntag gibt es bei Meyers immer 4-min Frühstückseier.
Wie lange dauert es, bis 2, 3, 5 Eier fertig gekocht sind?

Merke:
In diesen Beispielen werden immer Werte einander zugeordnet:

- Der Menge der Walnüsse ist der Preis dafür zugeordnet.
- Der Parkdauer ist eine Parkgebühr zugeordnet.
- Den Eiern ist eine Zeitdauer zugeordnet.

Um solche Zuordnungen übersichtlicher darzustellen und um die Fragen in den Beispielen zu beantworten, gibt es verschiedene Möglichkeiten: Eine davon ist die **Wertetabelle:**

Beispiel 1:

kg Walnüsse	1 kg =1000g	**100 g**	200 g	500 g = 0,5 kg	1,2 kg =1200 g
Preis in €	4 €	**0,40 €**	0,80 €	2,00 €	4,80 €

Um die gesuchten Preise für 200 g, 500 g und 1,2 kg einfach zu berechnen, ist es hilfreich, zuerst den Preis für eine kleine Menge zu notieren, hier z.B. für 100 g.

Beispiel 2:

Parkdauer	0,5 h = 30 min	10 min	50 min	2h 20min	6h 15min
Parkgebühr	1 €	1 €	1€+1€ = 2 €	4 x 1€ + 0,75€ = 4,75 €	7,50 €

Um die Parkgebühren zu berechnen ist zu beachten, dass sie sich nicht gleichmäßig verändern, sondern „springen“.

Beispiel 3:

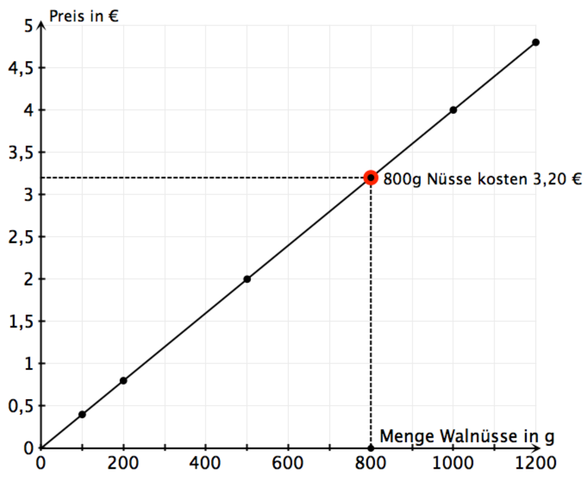
Anzahl Eier	1 Ei	2 Eier	3 Eier	5 Eier	10 Eier
Kochzeit in min	4 min	4 min	4 min	4 min	4 min

Alle Eier werden gleichzeitig fertig.

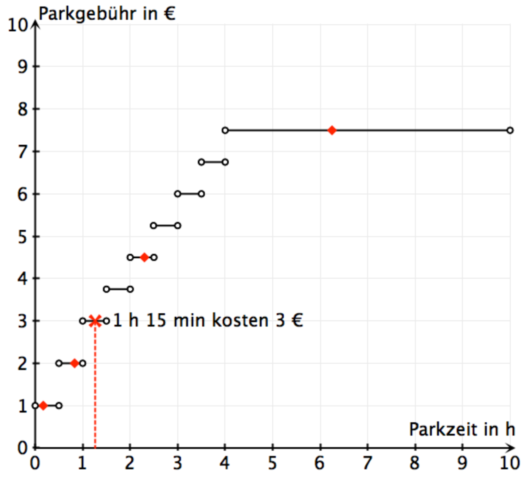
1.2 Schaubilder

Die Zuordnungen kann man auch grafisch in einem **Schaubild** darstellen. Dazu werden die Werte in einem Koordinatensystem eingezeichnet. Man kann dann auch weitere Werte ablesen.

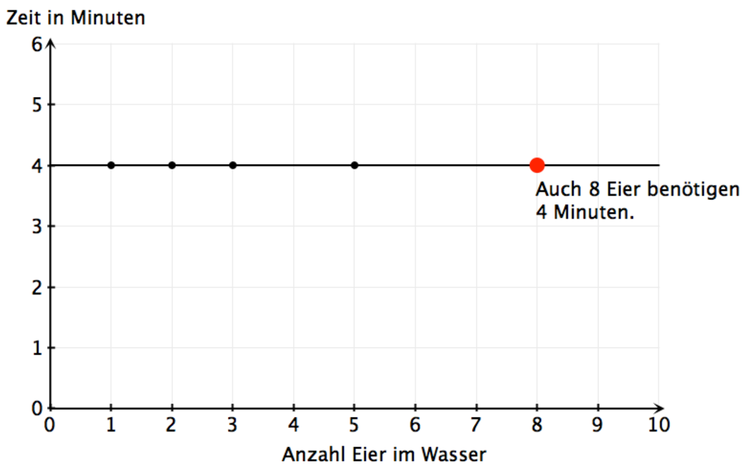
Beispiel 1 - Walnüsse: Was kosten 800 g?



Beispiel 2 - Parkgebühren: Wie hoch ist die Parkgebühr für 1h 15 min?



Beispiel 3 - Eier: Auch 8 Eier benötigen genau 4 Minuten.



Man nennt solche Zuordnungen auch **Funktionen**. Bei Funktionen ist einem bestimmten x-Wert (z.B. x kg) genau ein y-Wert (z.B. y €) zugeordnet. Im **Schaubild** werden Funktionen durch entsprechende Linien dargestellt. Diese nennt man **Graph** der Funktion.

2 Gerade, Steigung, Steigungsfaktor

2.1 Steigung

Im Beispiel mit den Walnüssen erkennt man: Wenn doppelt so viele Nüsse ($2 \cdot x\ kg$) gekauft werden, dann kosten sie doppelt so viel ($2 \cdot y$ €). Eine solche Funktion nennt man **proportionale Funktion**. Sie wird im Schaubild durch eine **Gerade** dargestellt, die durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft. Diese Gerade kann man mit der **Gleichung:** $\boldsymbol{y = a \cdot x}$ beschreiben. Dabei heißt **a** der **Steigungsfaktor**.
Er wird durch Umformung der Gleichung berechnet: $\boldsymbol{a = \frac{y}{x}}$.

Der Steigungsfaktor ist das Maß für die **Steigung der Geraden** im Schaubild.

<u>Beispiel:</u>
Im Beispiel 1 (Nüsse) entnimmt man der Wertetafel z.B. $x = 1000\ (g)$ und $y = 4\ (€)$.

Es ergibt sich: $a = \frac{y}{x} = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250} = 0{,}004.$

Also gilt die Gleichung: $y = 0{,}004$.

Rechenbeispiel: Was kosten 600 g?

$y = 0{,}004 \cdot 600 = 2{,}4$

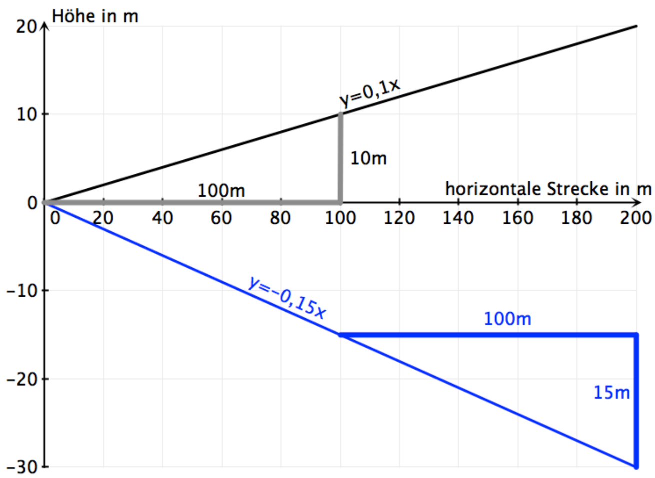
Antwortsatz: Die Nüsse kosten 2,40 €.

Merke:
Zur Bestimmung der Geradengleichung einer proportionalen Funktion kann man den Steigungsfaktor mit zugeordneten Werten aus der Wertetafel berechnen.

Im Gebirge findet man oft Verkehrsschilder mit Angaben zur Steigung oder dem Gefälle der Strasse. Dabei bedeutet z.B. 10%, dass eine Strasse um 10 m steigt bei 100 m horizontaler Strecke.

Merke:
Im Schaubild einer proportionalen Funktion kann man den Steigungsfaktor mit dem **Steigungsdreieck** bestimmen.

<u>Beispiele:</u>
Die Steigung einer Straße beträgt 10%.
Dann ist $a = \frac{10}{100} = 0{,}1$ und die Geradengleichung lautet: $y = 0{,}1 \cdot x$.
Das Gefälle einer Straße ist 15%.
Also geht es um 15 m bergab, wenn man horizontal 100 Meter zurücklegt. Somit ist der y-Wert negativ: - 15.
Also ist $a = -\frac{15}{100} = -0{,}5$ und die Gleichung lautet: $y = -0{,}15 \cdot x$.

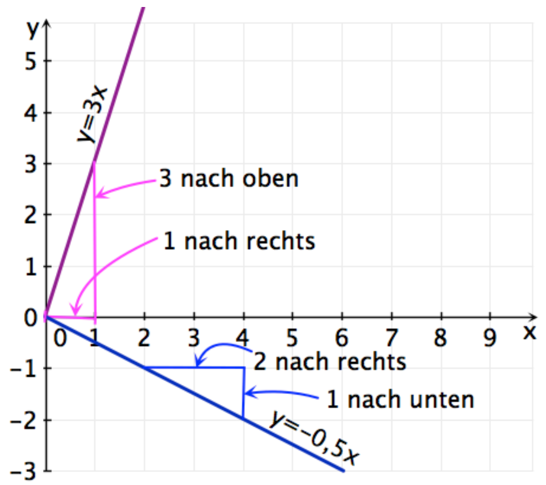


Kennt man die Geradengleichung, so kann man das Schaubild der Geraden mit Hilfe eines Steigungsdreiecks zeichnen.

Beispiele:

$y = -\frac{1}{2}x$:
Gehe 2 nach rechts und 1 nach unten.
Die Gerade geht durch die Punkte (0;0) und (2;-1).

$y = 3x$:
Gehe 1 nach rechts und 3 nach oben zum Punkt (1;3).



3 Lineare Funktionen

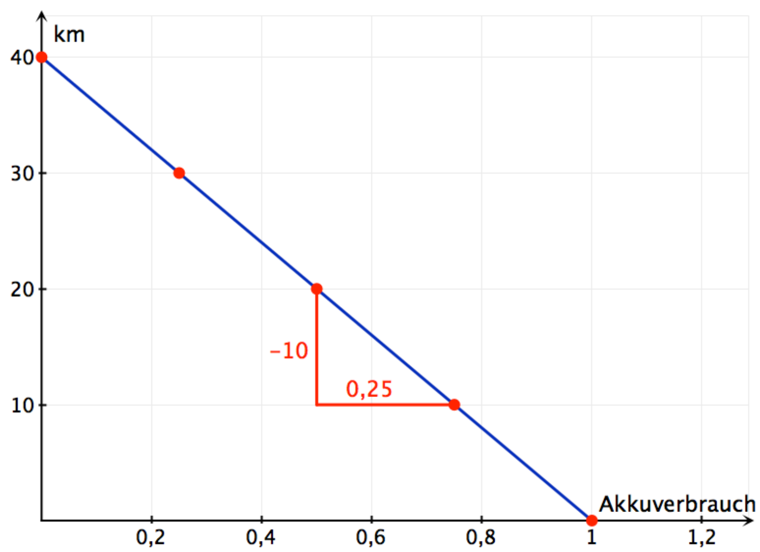
3.1 Definition

Mit ihrem Elektrofahrrad kann Nicoletta 40 km weit mit einer Akkuladung fahren. Wenn sie schön gleichmäßig fährt, dann hat sie nach 10 km ein Viertel der Akkuladung verbraucht, also noch für 30 km "Saft".

Um das Schaubild dazu zu zeichnen wird zunächst eine Wertetabelle erstellt:

x Akkuverbrauch	0	1/4	1/2	3/4	1
y mögliche Entfernung	40 km	30 km	20 km	10 km	0 km

Die Punkte liegen alle auf einer Geraden.
Die Steigung ergibt sich mit dem Steigungsdreieck: $-\frac{10}{0{,}25} = -40$.



Die Gerade geht nicht durch den Ursprung des Koordinatensystems, sondern ist nach oben um 40 verschoben. Damit ergibt sich als Geradengleichung: $y = -40x + 40$.

Eine Funktion mit einer Geradengleichung der Form: $f(x) = a \cdot x + b$ heißt lineare Funktion.

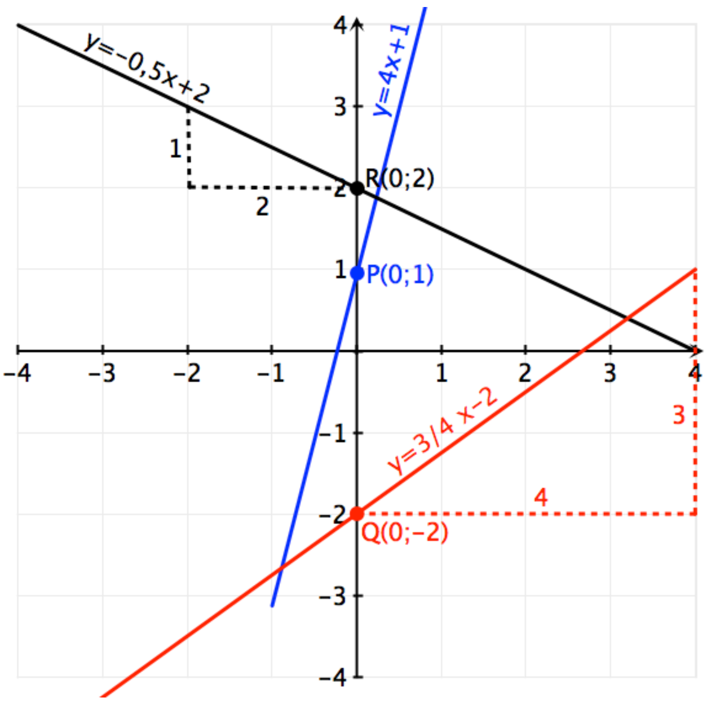
Man schreibt auch:

Die Funktion $f(x): x \longmapsto a \cdot x + b$ heißt **lineare Funktion** mit $a, b, x \in \mathbb{R}$.
Jede lineare Funktion hat eine Gerade als Graph mit der Steigung a und dem y-Achsenabschnitt b.
Zur linearen Funktion $f(x)$ gehört die Funktionsgleichung $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x + b}$ oder auch $\boldsymbol{y = a \cdot x + b}$.

Beispiele:
Die Funktion $f(x): x \longmapsto 4x + 1$ hat die Funktionsgleichung $f(x) = 4x + 1$ mit der Steigung 4 und dem y-Achsenabschnitt 1. Sie schneidet die y-Achse im Punkt P(0;1).

Die Funktion $f(x): x \longmapsto \frac{3}{4}x - 2$ hat die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$ mit der Steigung 0,75 (=3/4) und dem y-Achsenabschnitt -2. Sie schneidet die y-Achse im Punkt Q(0; -2).

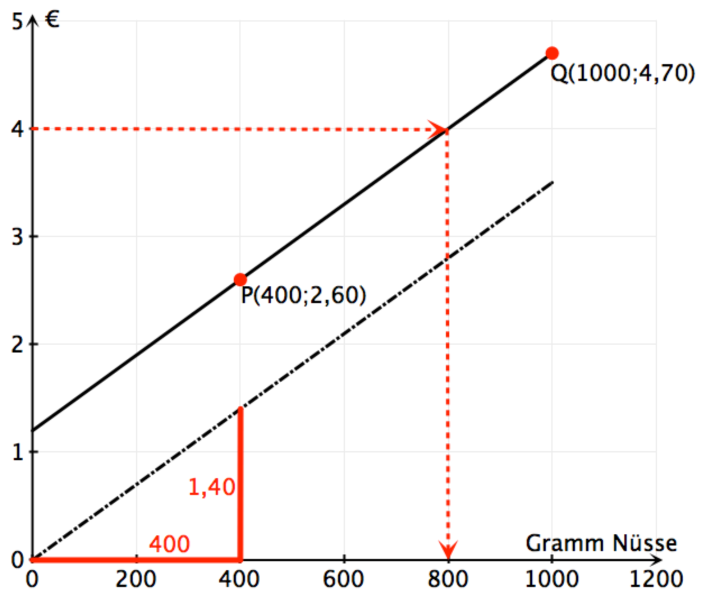
Die Funktion $f(x): x \longmapsto -0{,}5x + 2$ hat die Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}5x + 2$ mit der Steigung -0,5 und dem y-Achsenabschnitt 2. Sie schneidet die y-Achse im Punkt R(0; 2).



3.2 Musteraufgabe

Teil 1:
Lars kauft schon wieder Walnüsse, 1 kg kosten nun 3,50 €. Er kauft jetzt 400 g und noch eine Tafel Schokolade für 1,20 € und bezahlt insgesamt 2,60 €.
Zeichne den Graph der Funktion Gewicht x → Preis y und stelle die Funktionsgleichung auf.

Lösung:
Der Kauf von Nüssen ist eine lineare Funktion, der Graph also eine Gerade. Um diese zu zeichnen genügen 2 Punkte.
Wir wissen: 400 g und Schokolade kosten 2,60 €. Ein "Punkt" ist also P(400; 2,60). Würde Lars 1 kg Nüsse und eine Schokolade kaufen, müsste er 4,70 € bezahlen. Also ist der 2. Punkt Q(1000; 4,70).



Mit Hilfe des Steigungsdreiecks in der parallelen Gerade durch den Nullpunkt ergibt sich als Steigung $a = \frac{1,4}{400} = 0{,}035$ und als y-Abschnitt $b = 1{,}20$.
Somit lautet die Funktionsgleichung $y = 0{,}035x + 1{,}2$.

Teil 2:
Lars hat 4 € in der Tasche, kauft die Schokolade und für den Rest noch Nüsse. Wie viel g Nüsse bekommt er?

Lösung:
Ablesen in der Grafik ergibt 800 g. Mit der umgeformten Funktionsgleichung $x = \frac{(y-b)}{a}$ ergibt sich $\frac{(4-1{,}2)}{0{,}035} = 800$. Lars erhält also 800 Gramm Nüsse dazu.

Merke:
Mit 2 Punkten lässt sich eine Gerade im Koordinatensystem zeichnen. Mit Hilfe eines Steigungsdreiecks wird die Steigung a berechnet. Der y-Abschnitt b kann am Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse abgelesen werden. Damit ergibt sich die Funktionsgleichung $\boldsymbol{y = a \cdot x + b}$.

3.3 Weitere Musteraufgabe

Amelie fährt mit ihrem Fahrrad die 6 km von der Schule nach Hause mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 15 km/h. Wie lange braucht sie dafür? Nach 9 min fängt es an zu regnen. Wie weit ist es noch nach Hause?

Lösung:

Gesucht ist der Graph der linearen Funktion x (km) → y (h). Wir kennen einen "Punkt" P, da sie in 1 h 15 km fahren kann, also P(15; 1). Der zweite Punkt hat 6 (km) als x-Wert. Für diese 6 km benötigt sie y = 6 km : (15 km/h) = 0,4 h.

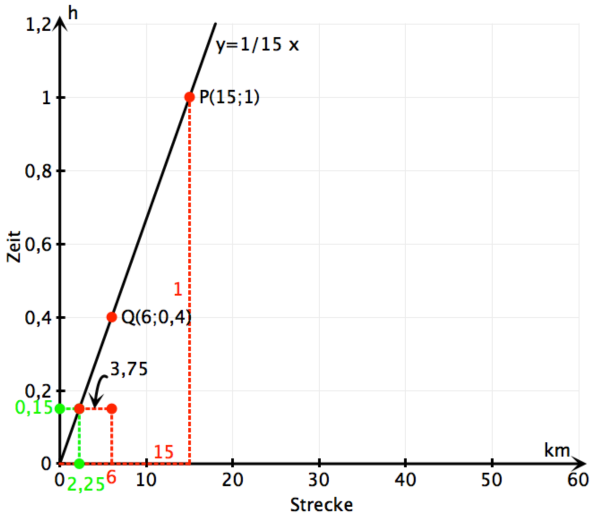
Somit ist Q(6; 0,4) ein Punkt auf der Geraden. Wir stellen fest, dass die Gerade durch den Nullpunkt geht. Also ist die Funktion proportional, und die Steigung kann direkt abgelesen werden:

$a = \frac{1}{15}$. Die Funktionsgleichung ist $y = \frac{1}{15}x$.

Um den restlichen Weg nach Hause zu berechnen, werden Zeitangaben entweder in Stunden oder in Minuten benötigt. Wir nehmen Stunden:

$9 \text{ min} = \frac{9}{60} \text{ h} = 0{,}15 \text{ h}.$

Nach 0,15 h muss Amelie also noch weitere y = 0,4 h - 0,15 h = 0,25 h fahren.

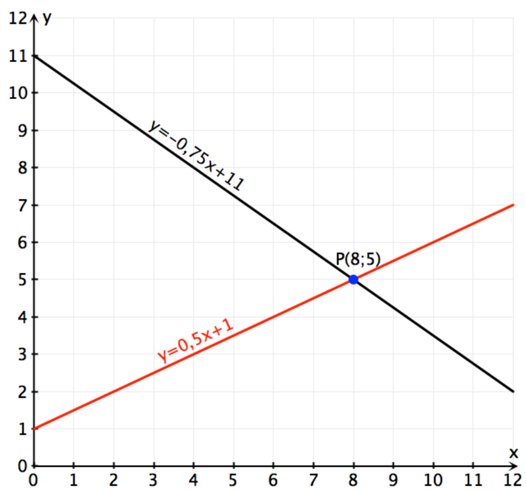


Es ist $x = \frac{y}{a} = \frac{0{,}25}{\left(\frac{1}{15}\right)} = 3{,}75.$

Antwortsatz: Sie muss noch 3,75 km im Regen radeln.

4 Schnittpunkte von Geraden

Im unten stehenden Koordinatensystem schneiden sich 2 Geraden im Punkt P.
In diesem Schaubild kann man das leicht ablesen. Der Schnittpunkt ist P(8;5).



4.1 Musteraufgabe

Bei vielen Aufgaben dieser Art ist das jedoch nicht möglich, wie die folgende Aufgabe von Amelie und ihrer Mutter zeigt.
Amelie ruft sofort bei Beginn des Regens per Handy ihre Mutter an um sie vor dem Regen zu "retten". Die Mutter fährt 3 min nach Amelie's Anruf mit dem Auto los und mit 40 km/h in Richtung Amelie. Wann treffen sie sich und wo?

Lösung:
Der Graph von Amelie hat die Gleichung $y = \frac{1}{15}x$. Die Steigung des Graphen für die Mutter lässt sich aus der Geschwindigkeit (wie oben) angeben: $a = \frac{1}{40}$. Sie fährt allerdings erst 9 min + 3 min = 12 min später ab, somit ist der y-Abschnitt b = 12 (min) = 0,2 (h).
Die Gleichung lautet $y = \frac{1}{40}x + 0{,}2$.

In dem Schaubild kann man nicht genau erkennen, wo die beiden Geraden sich schneiden. Mit den zwei Geradengleichungen kann man das jedoch ausrechnen.

Dazu werden die beiden Gleichungen gleichgesetzt:

$$\frac{1}{15}x = \frac{1}{40}x + 0{,}2 \qquad \left| -\frac{1}{40}x\right.$$

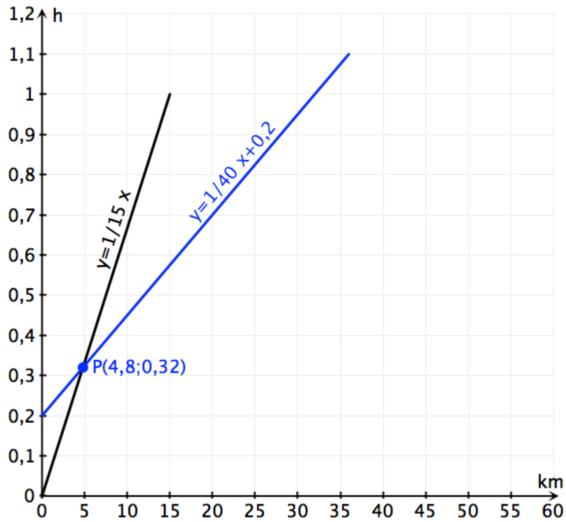
$$\frac{1}{15}x - \frac{1}{40}x = 0{,}2 \qquad |x\ ausklammern$$

$$\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{40}\right) \cdot x = 0{,}2 \qquad |Bruchteile\ gleichnamig$$

$$\left(\frac{8}{120} - \frac{3}{120}\right) \cdot x = 0{,}2 \qquad |Klammer\ ausrechnen!$$

$$\frac{5}{120} \cdot x = 0{,}2 \qquad \left|: \frac{5}{120}\right.$$

$$x = \frac{2}{10} \cdot \frac{120}{5} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{24}{5}$$



Diesen x-Wert setzen wir in eine der beiden Gleichungen ein, um y zu erhalten:

$$y = \frac{1}{15} \cdot x = \frac{1}{15} \cdot \frac{24}{5} = \frac{24}{75} = 0{,}32$$

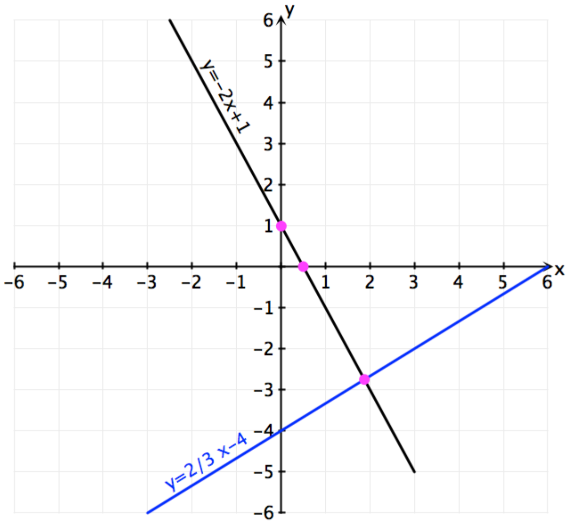
Sie treffen sich also nach 0,32 h = 19,2 min nach Abfahrt von Amelie von der Schule. Sie ist in dieser Zeit schon 24/5 km = 4,8 km gefahren, also nur noch 1,2 km von zu Hause weg. Da ist sie schon ganz schön nass!

Merke:
Man berechnet den Schnittpunkt zweier Geraden, indem man die beiden Geradengleichungen gleichsetzt. Das gilt auch für den Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse oder der y-Achse.

4.2 Weitere Beispiele

Bestimme in die Schnittpunkte der Geraden
$y = -2x + 1$ mit ...

a) ... der y-Achse
b) ... der x-Achse
c) ... der Gerade $y = \frac{2}{3}x - 4$



Lösungen

a) Für die y-Achse gilt x=0, also ist y=1.
Der Schnittpunkt ist P(0; 1).

b) Die x-Achse hat die Gleichung y=0, somit ist

$$0 = -2x + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

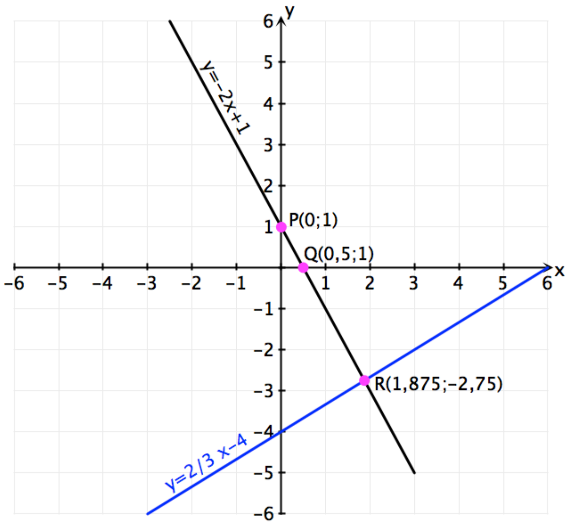
Der Schnittpunkt ist $Q\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

c) $\quad -2x + 1 = \frac{2}{3}x - 4$
$\Leftrightarrow \quad 5 = \frac{2}{3}x + 2x$
$\Leftrightarrow \quad \frac{8}{3}x = 5$
$\Leftrightarrow \quad x = \frac{15}{8}$

x eingesetzt in die erste Gleichung:

$$y = -2 \cdot \frac{15}{8} + 1 = -\frac{30}{8} + \frac{8}{8} = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4}$$

Der Schnittpunkt ist $R\left(\frac{15}{8}; -\frac{11}{4}\right)$.



5 Geradendarstellung

Geradengleichungen lassen sich auf verschiedene Arten bestimmen, je nachdem, welche Angaben man kennt.

5.1 Die Normalform

Bei der **Normalform** sind Steigung **a** und y-Abschnitt **b** bekannt. Es gilt dann: $y = a \cdot x + b$.

Beispiel:

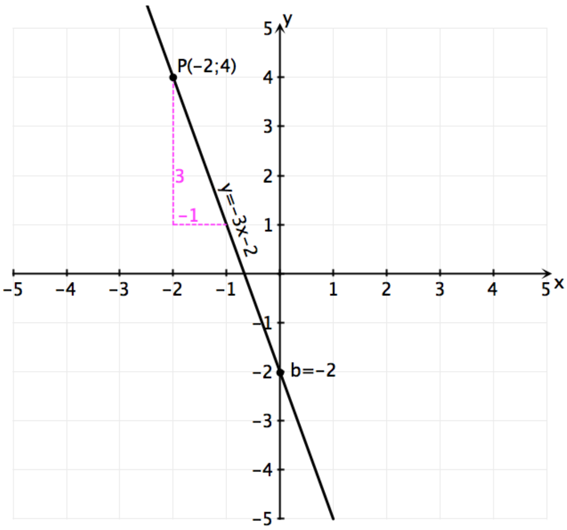
Eine Gerade g hat die Steigung $\frac{2}{5}$ und schneidet die y-Achse bei $y = -2$.

Dann lautet die Geradengleichung: $\quad y = \frac{2}{5}x - 2.$

5.2 Die Punkt-Steigungsform

Bei der **Punkt-Steigungsform** sind ein Punkt **P(x_1; y_1)** auf der Geraden sowie die Steigung **a** bekannt. Setzt man die Werte x = x_1 und y = y_1 in die Gleichung: $y = a \cdot x + b$ ein, erhält man:
$y_1 = a \cdot x_1 + b \quad \Leftrightarrow b = y_1 - a \cdot x_1$

Diesen Term setzen wir als b in die Gleichung $y = a \cdot x + b$ ein; a können wir dabei ausklammern und erhalten: $y = a \cdot (x - x_1) + y_1$.



Beispiel 1:
Eine Gerade mit der Steigung a= -3 geht durch den Punkt P(-2; 4). Dann ist
$y = -3 \cdot \left(x - (-2)\right) + 4 = -3x - 6 + 4 =$
$-3x - 2$.
Somit ist $y = -3x - 2$ die Geradengleichung.

5.3 Die 2-Punkte-Form

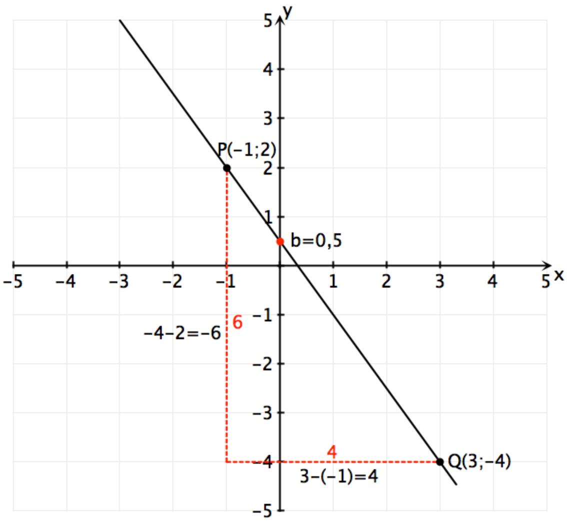
Bei der **2-Punkteform** sind 2 Punkte **P(x_1; y_1)** und **Q(x_2; y_2)** der Geraden bekannt. Dann ist die Steigung: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Wir setzen einen Punkt, z.B. **P(x_1; y_1)** in die Gleichung ein:
$y_1 = a \cdot x_1 + b \quad \Leftrightarrow b = y_1 - a \cdot x_1 \; mit \; a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Jetzt setzen wir a und b in die allgemeine Gleichung ein und erhalten:

$$y = a \cdot x + y_1 - a \cdot x_1$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

Wir klammern den Ausdruck $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ aus und erhalten:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1.$$



Beispiel 2:
Mit P(-1; 2) und Q(3; -4) ergibt sich in einem Schritt mit der hergeleiteten Formel:

$$y = \frac{(-4-2)}{(3-1)}) \cdot (x-1) + 2 = -\frac{6}{4} \cdot (x+1) + 2$$

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Musteraufgabe 1
In USA misst man die Temperatur in Grad Fahrenheit (^{0}F). Für die Umrechnung in Grad Celsius (^{0}C) ist $\frac{9}{5}$ der Faktor, mit dem der Celsius-Wert multipliziert wird. Außerdem ist bekannt, dass der Gefrierpunkt 0 ^{0}C = 32 ^{0}F ist. Erstelle die Umrechnungsgleichung und wandle die Temperaturen

a) 25 ^{0}C in ^{0}F um.
b) -20 ^{0}C in ^{0}F um.

Lösung:
Bekannt sind die Steigung $a = \frac{9}{5}$ und der y-Abschnitt $b = 32$. Mit der Normalform ergibt sich (y in ^{0}F, x in ^{0}C): $y = \frac{9}{5}x + 32$.

a) 25 ^{0}C: $y = \frac{9}{5} \cdot 25 + 32 = 87$ Antwort: 25 ^{0}C sind 87 ^{0}F.

b) -20 ^{0}C: $y = \frac{9}{5} \cdot (-20) + 32 = -4$ Antwort: -20 ^{0}C sind -4 ^{0}F.

Musteraufgabe 2
Nils trainiert für den Halbmarathon auf dem Laufband. Sein Ziel ist es heute, in
20 min 3200 m zu laufen. Bevor er läuft wärmt er sich 5 min lang auf dem Crosstrainer auf. Bestimme die Funktionsgleichung für die Funktion Zeit im Studio (min) ⟶ Laufstrecke (m). Wie weit ist er nach 13 min seit Ankunft im Studio gelaufen?

Lösung:
Wir kennen einen Punkt, da er nach x = 5 min y = 0 m gelaufen ist, also P(5; 0). Außerdem ist die Steigung bekannt: 3200:20 = 160. Mit der Punkt-Steigungsform erhalten wir: $y = 160(x - 5) + 0 = 160x - 80$.
Antwort: Nach 13 min ist er $y = 160 \cdot 13 - 800 = 1280\ m$ gelaufen.

Musteraufgabe 3
Elli löst alle 50 Mathefritz-Aufgaben in 4 h 10 min. Wie viele Aufgaben löst sie im Durchschnitt in 30 min?

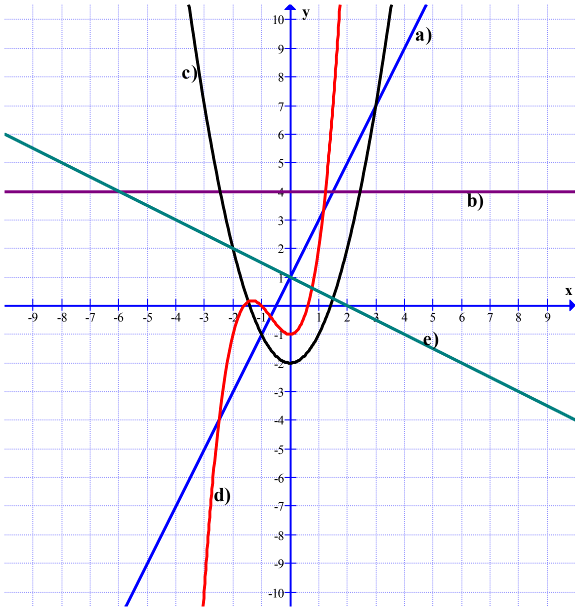
Lösung:
Wir kennen 2 Punkte: P(250 (min); 50 (Aufgaben)). Q(0; 0) ist der andere Punkt, denn in 0 min löst sie 0 Aufgaben. Es handelt sich hier um eine proportionale Funktion! Wenn wir das erkennen, benötigen wir nur die Steigung, denn es gilt: $y = a \cdot x$.

Die Steigung errechnet sich: $a = \frac{\text{Anzahl Aufgaben}}{\text{Zeit f. diese Aufgaben (in min)}} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Jetzt setzen wir 30 für x ein: $y = 0{,}\cdot x = 0{,}2 \cdot 30 = 6$

Antwort: In 30 min löst Elli 6 Aufgaben.

6 Übungsaufgaben



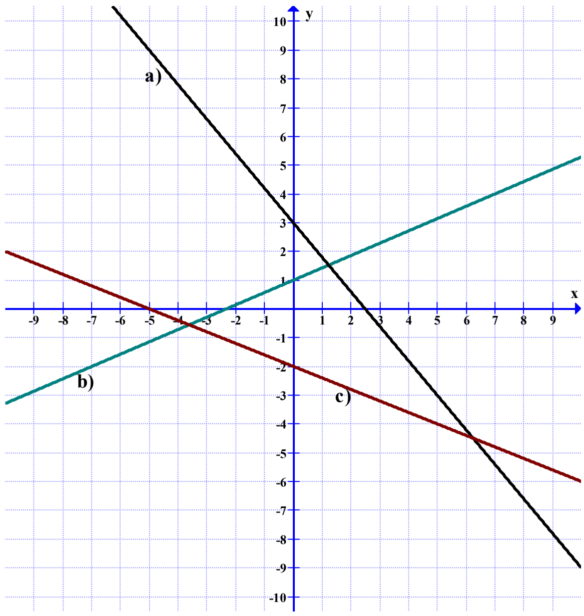
1. Aufgabe – lineare Funktionen erkennen
Bei welchen Graphen handelt es sich um lineare Funktionen? Bestimme jeweils von den linearen Funktionen die Funktionsgleichung.

2. Aufgabe – lineare Funktionen zeichnen
Zeichne die folgenden linearen Funktionen in ein Koordinatensystem!

a) $f(x) = \frac{4}{3}x - 3$ b)

$f(x) = 5 - 2x$

c) $f(x) = 0{,}4x + 4$ d) $f(x) = -6$



3. Aufgabe
Zeichne jeweils ein geeignetes Steigungsdreieck ein und bestimme damit die Steigung der Geraden und die Geradengleichung! Bestimme anschließend zu jeder Geraden den Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle).

4. Aufgabe
Bestimme rechnerisch den Schnittpunkt der Geraden aus **Aufgabe 3** mit der x-Achse!

5. Aufgabe
Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung, wenn 2 Punkte einer Geraden gegeben sind.

a) P(2; 3), Q(6; -3) b) P(3; 1), Q(5; 3) c) P(-4; -4), Q(0; 2) d) P(3; 0), Q(7; -4)

6. Aufgabe
Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung, wenn ein Punkt und die Steigung m gegeben ist.

a) P(2;2); m = 2 b) P(4;0); m = -3 c) P(-2;-1); m = 1,5 d) P(0;2); m = -1

Lösungen zu den Übungsaufgaben 6.

1. Aufgabe

a) ist eine Gerade: y-Achsenabschnitt
n = 1, Steigung m=2
$f(x)=2x+1$

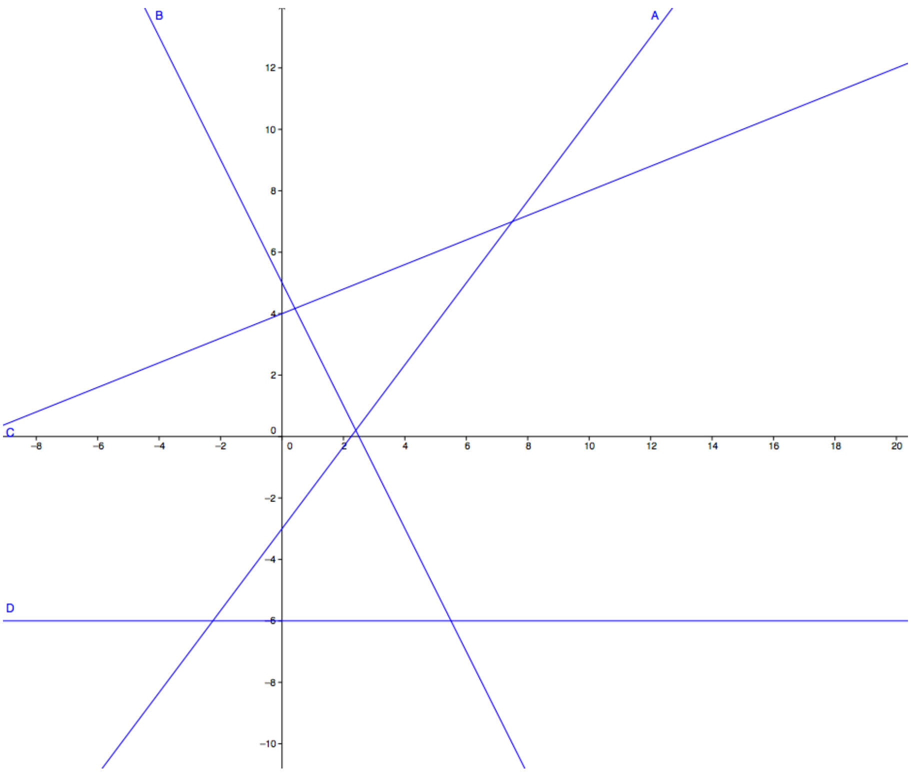
b) ist eine Gerade als konstante Funktion $f(x) = 4$

c) keine lineare Funktion (Parabel)
d) keine lineare Funktion
e) ist eine Gerade:
n=1, m=-0,5
$f(x) = -0{,}5x+1$

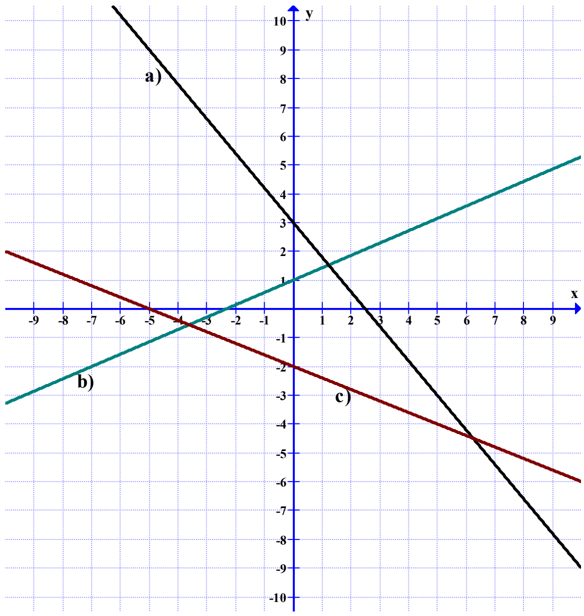
2. Aufgabe – lineare Funktionen zeichnen
Zeichne die folgenden linearen Funktionen in ein Koordinatensystem!

A $f(x)=\frac{4}{3}x-3$ B $f(x)=5-2x$

C $f(x)=0{,}4x+4$ D $f(x)=-6$



3. Aufgabe



a)

$y-Achsenabschnitt = 3$

$Steigung = -\frac{6}{5}$

$(gehe\ von\ P(0;3)\ 6\ nach\ unten\ und\ 5\ nach\ rechts)$

$f(x) = -\frac{6}{5}\ x + 3$

b)

$y-Achsenabschnitt = 1$

$Steigung = \frac{3}{7}$

$(gehe\ von\ P(0;1)\ 3\ nach\ oben\ und\ 7\ nach\ rechts)$

$f(x) = \frac{3}{7}\ x + 1$

c)

$y-Achsenabschnitt = -2$

$Steigung = -\frac{2}{5} = -0,4$

$(gehe\ von\ P(0;-2)\ 2\ nach\ oben\ und\ 5\ nach\ links)$

$f(x) = -\frac{2}{5}\ x + -2$

4. Aufgabe

Schnittpunkt mit der x-Achse bedeutet, dass der y-Wert = 0 ist!

a)

$$0 = -\frac{6}{5}\ x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6}{5}\ x = 3 \quad \Leftrightarrow x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5$$

b)

$$0 = \frac{3}{7}\ x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{7}\ x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{7}{3}$$

c)

$$0 = -\frac{2}{5}\ x + -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{5}\ x = -2 \quad \Leftrightarrow x = -5$$

Im Schaubild können die Schnittpunkte leicht geprüft werden!

5. Aufgabe
Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung, wenn 2 Punkte einer Geraden gegeben sind.

a) P(2; 3), Q(6; -3)

b) P(3; 1), Q(5; 3)

c) P(-4; -4), Q(0; 2)

d) P(3; 0), Q(7; -4)

a)

$$m = \frac{-3-3}{6-2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$$

$$3 = -\frac{3}{2} \cdot 2 + n$$

$$n = 6$$

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 6$$

b)

$$m = \frac{3-1}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

$$1 = 3 + n$$

$$n = -2$$

$$f(x) = x - 2$$

c)

$$m = \frac{2-(-4)}{0-(-4)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$2 = \frac{3}{2} \cdot 0 + n$$

$$n = 2$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x + 2$$

d)

$$m = \frac{-4-0}{7-3} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$0 = -1 \cdot 3 + n$$

$$n = 3$$

$$f(x) = -x + 3$$

6. Aufgabe
Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung, wenn ein Punkt und die Steigung m gegeben ist.

a) P(2;2); m = 2

b) P(4;0); m = -3

c) P(-2;-1); m = 1,5

d) P(0;2); m = -1

a)

$$2 = 2 \cdot 2 + n$$

$$n = -2$$

$$f(x) = 2x - 2$$

b)

$$0 = -3 \cdot 4 + n$$

$$n = 12$$

$$f(x) = -3x + 12$$

c)

$$-1 = 1{,}5 \cdot (-2) + n$$

$$n = 2$$

$$f(x) = 1{,}5x + 2$$

d)

$$2 = -1 \cdot 0 + n$$

$$n = 2$$

$$f(x) = -x + 2$$

7 Übungs-Klassenarbeiten

7.1 Leichte Klassenarbeit 1 (45 Minuten)

1. Aufgabe - Verständnisfragen

a) Worin unterscheiden sich eine proportionale Funktion und eine allgemeine lineare Funktion?

b) Eine allgemeine lineare Funktion hat die Form $f(x) = m \cdot x + n$.
Welche Bedeutung haben in diesem Rechenausdruck die Variablen m und n?

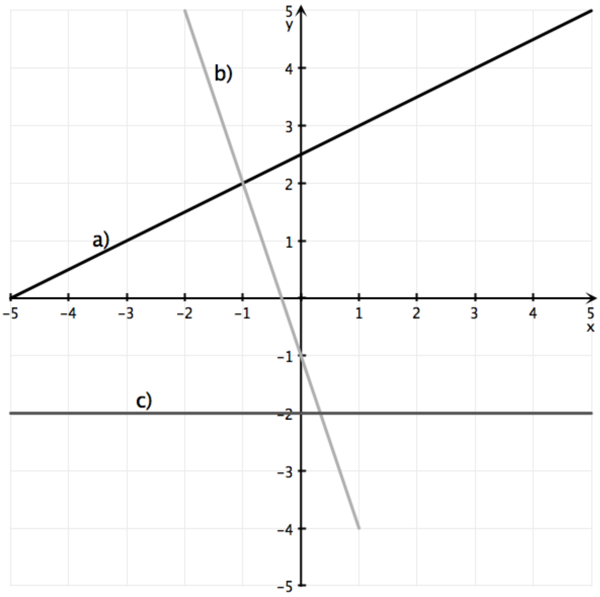
2. Aufgabe

Vervollständige die unvollständige Wertetabelle im Heft, die zu einer proportionalen Funktion gehört und gib die dazugehörige Funktionsvorschrift an!

x	*-4*	*-1*	*0*	*2*	*3*
f(x)				*4*	

3. Aufgabe

Bestimme die Funktionsgleichungen a), b), c) zu den abgebildeten linearen Funktionen. Gib diese Funktionsgleichungen im Heft an! Zeichne als Hilfe ein Steigungsdreieck in das Schaubild ein!



4. Aufgabe

Bestimme zwei Punkte des Graphen von *f(x)* und zeichne die Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem!

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = \frac{4}{3}x - 2$

c) $f(x) = -1 + \frac{2}{3}x$

5. Aufgabe

Bestimme die Funktionsvorschrift der linearen Funktionen aus den gegebenen Angaben!

a) *P(2;2) , m = -4* b) *P(0;0) , m = 2,5*

c) *P(0;1) , Q(7;3)* d) *P (-2;-5) , Q(3;0)*

6. Aufgabe

Das Schaubild der linearen Funktion *f(x)* verläuft durch den Punkt P(0;3) und hat die Nullstelle 6.
Bestimme die Funktionsgleichung!

Lösungen zur Klassenarbeit 7.1

1. Aufgabe - Verständnisfragen
a) Eine proportionale Funktion verläuft durch den Ursprung (Nullpunkt).
b) m nennt man Steigung. n: y-Achsenabschnitt

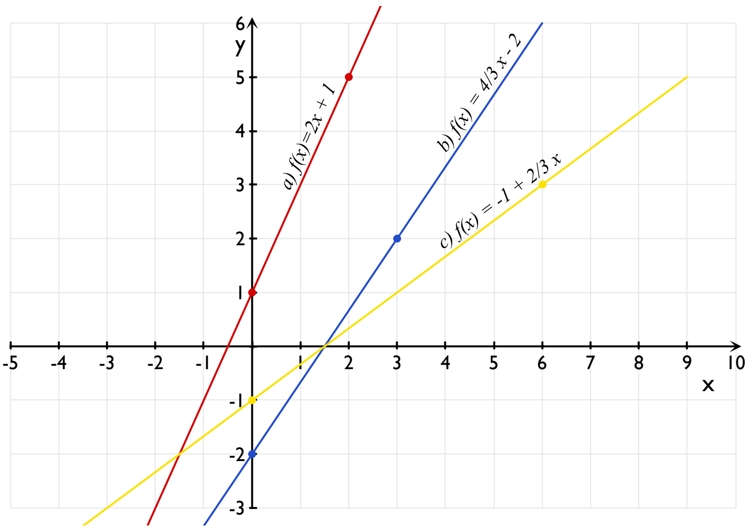
2. Aufgabe
Proportional bedeutet, die Gerade verläuft durch den Ursprung. Der y-Achsenabschnitt ist daher Null. Die Steigung ergibt sich aus einem beliebigen Quotienten y:x, z.B. m = 4:2 = 2.
Die Funktionsvorschrift lautet: $f(x) = 2x$.

Wertetabelle					
x	-4	-1	0	2	3
$f(x)$	-8	-2	0	4	6

3. Aufgabe
a) $f(x) = 0{,}5x + 2{,}5$
b) $f(x) = -3x - 1$
c) $f(x) = -2$

4. Aufgabe

Punkte: siehe Grafik!
a) $P(1;0), Q(2;5)$
b) $P(0;-2), Q(3;2)$
c) $P(0;-1), Q(6;3)$

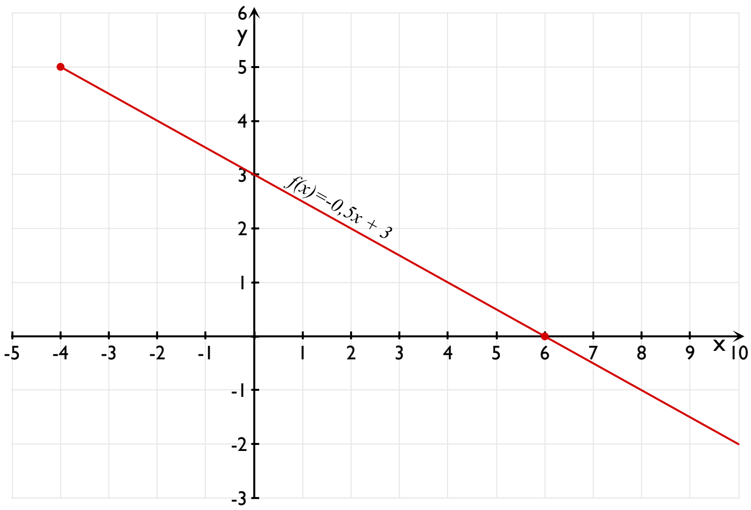


5. Aufgabe
a) $f(x) = -4x + 10$
b) $f(x) = 2{,}5x$
c) $f(x) = 2/7\,x + 1$
d) $f(x) = x - 3$

6. Aufgabe
Der Punkt P liegt auf der y-Achse und damit ist der y-Achsenabschnitt = 3. Durch die beiden Punkte erhält man als Steigungsdreieck:
$- 3/6 = - 0{,}5 = -1/2$

Die Funktionsgleichung lautet:

$f(x) = -0{,}5x + 3$



7.2 Klassenarbeit 2 (45 Minuten)

1. Aufgabe
Eine Gerade verläuft durch die Punkte P(2; 3) und Q(4; -1). Bestimme die dazugehörige Funktionsgleichung.

2. Aufgabe
Prüfe rechnerisch, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen: P(1; 3), Q(4; -3) und R(3;0).

3. Aufgabe
Petra löst 60 Matheaufgaben in 4 h.

a) Bestimme eine Funktionsgleichung für die Zuordnung *Zeit (in Minuten) -> Anzahl der gelösten Matheaufgaben*.
b) Wie viele Aufgaben löst sie in 20 min?

4. Aufgabe:
Hans trainiert für den 10 km Lauf auf dem Laufband. Sein Ziel ist es heute, in
25 min 3500 m zu laufen. Bevor er läuft wärmt er sich 10 min lang auf dem Crosstrainer auf.

a) Bestimme die Funktionsgleichung für die Funktion *Zeit im Studio (min)* ⟶ *Laufstrecke (m)*.
b) Zeichne ein Schaubild für die Funktion.
b) Wie weit ist er nach 20 Minuten seit Ankunft im Studio gelaufen?

5. Aufgabe
Peter zahlt für seine Telefongespräche mit dem Handy 15 Cent pro Minute, ohne Grundgebühr.
Sabine hat eine Flatrate und kann für 30 € im Monat unbegrenzt telefonieren.
Hans zahlt 9 Euro Grundgebühr und nur 9 Cent pro Minute.

a) Bestimme die Funktionsgleichungen für jeden Handytarif.
b) Zeichne die Schaubilder zu den einzelnen Funktionen in einem Koordinatensystem dar.
c) Welcher Tarif ist bei einem Gesprächsvolumen von 4 Stunden am günstigsten? Rechnung oder Begründung anhand der Schaubilder!

6. Aufgabe
8 Orangen wiegen in einem Holzkorb 2 kg, 12 Orangen wiegen im gleichen Korb 2,6 kg.

a) Wie schwer ist der Korb und wie schwer ist eine einzelne Orange?
b) Stelle eine Funktionsgleichung *Anzahl Orangen -> Gewicht des Korbes mit den Orangen* auf.

Lösungen zu Klassenarbeit 7.2

1. Aufgabe

$$Steigung\ m: \qquad m = \frac{-1-3}{4-2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$y = m \cdot x + n$

$Wir\ nehmen\ x, y\ von\ Punkt\ P:\ \ x = 2;\ \ y = 3$

$3 = -2 \cdot 2 + n$

$n = 3 + 4 = 7$

$f(x) = -2x + 7$

2. Aufgabe

Prüfe rechnerisch, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen: P(1; 3), Q(4; -3) und R(3;0).

Wenn die Steigung von PQ und PR gleich ist, liegen die Punkte auf einer Geraden.
Alternativ kann aus P und Q die Geradengleichung bestimmt werden und mit dem Punkt R geprüft werden, ob dieser diese Gleichung erfüllt und damit auf der Geraden liegt.

1. Variante:

$$m_{PQ} = \frac{-3-3}{4-1} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$m_{PR} = \frac{0-3}{3-1} = \frac{-3}{2} = -1{,}5$$

$Die\ Steigung\ ist\ verschieden,\ daher\ liegen\ die\ Punkte\ nicht\ auf\ einer\ Geraden.$

2. Variante:

$$m_{PQ} = \frac{-3-3}{4-1} = \frac{-6}{3} = -2$$

$y = mx + n$

$3 = -2 \cdot 1 + n$

$n = 5$

$f(x) = -2x + 5$

$R(3;0)\ eingesetzt:$

$0 = -2 \cdot 3 + 5$

$0 = -6 + 5$

$0 = -1$

$Gleichung\ ist\ nicht\ erfüllt,\ der\ Punkt\ R\ liegt\ daher\ nicht\ auf$

$der\ Geraden,\ die\ durch\ P\ und\ Q\ verläuft.$

3. Aufgabe
Petra löst 60 Matheaufgaben in 4 h.

a) Bestimme eine Funktionsgleichung für die Zuordnung *Zeit (in Minuten) -> Anzahl der gelösten Matheaufgaben*.

b) Wie viele Aufgaben löst sie in 20 min?

a) 60 Aufgaben in 4h = 240 Minuten
1 Aufgabe in 4 Minuten
oder 0,25 Aufgaben in 1 Minute.

$$m = \frac{60}{240} = \frac{1}{4} \; (Aufgaben \;\; pro \;\; Minute)$$

$$f(x) = 0{,}25 \cdot x$$

b)

$$f(20) = 0{,}25 \cdot 20 = 5$$

In 20 Minuten werden 5 Aufgaben gelöst.

4. Aufgabe:
Hans trainiert für den 10 km Lauf auf dem Laufband. Sein Ziel ist es heute, in 25 min 3500 m zu laufen. Bevor er läuft wärmt er sich 10 min lang auf dem Crosstrainer auf.

a) Bestimme die Funktionsgleichung für die Funktion *Zeit im Studio (min) ⟶ Laufstrecke (m)*.

Genau genommen beginnt die Zeit erst nach 10 Minuten, wenn er beginnt, zu laufen.
D.h. nach 10 Minuten (x-Achse) haben wir den Wert 0 auf der y-Achse, das ist der Punkt: P(10;0)
Die Steigung beträgt:

$$m = \frac{3500m}{20\,\text{min}} = 175\frac{m}{\text{min}}$$

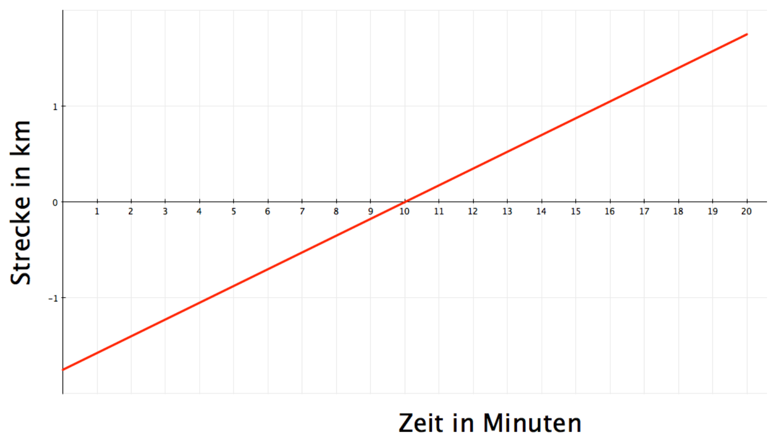
$$y = mx + n$$

$$0 = 175 \cdot 10 + n$$

$$n = -1750$$

$$f(x) = 175x - 1750$$

b) Schaubild :



c) Wie weit ist er nach 20 Minuten seit Ankunft im Studio gelaufen?

$$y = 175 \cdot 20 \; - 1750$$

$$y = 3500 - 1750 = 1750$$

Er ist nach 20 Minuten im Studio effektiv 10 Minuten gelaufen und das sind 1750 m.

5. Aufgabe

a) Bestimme die Funktionsgleichungen für jeden Handytarif:

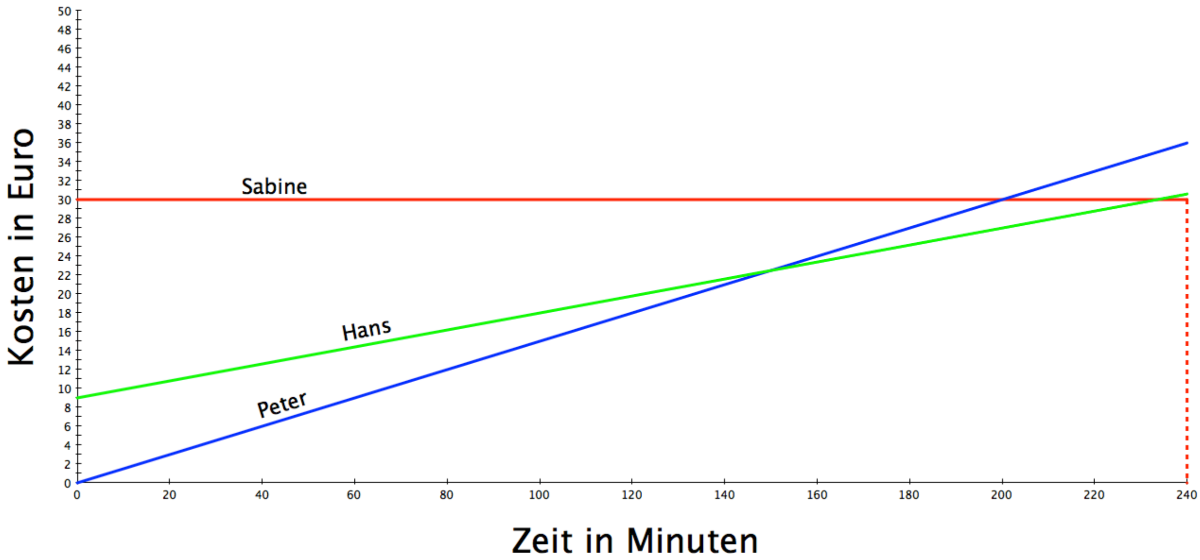
$f(x): Kosten\ in\ €$

$Peter: f(x) = 0{,}15 \cdot x$

$Sabine: f(x) = 30$

$Hans: f(x) = 0{,}09 \cdot x + 9$

b) Zeichne die Schaubilder zu den einzelnen Funktionen in einem Koordinatensystem dar.



c) Welcher Tarif ist bei einem Gesprächsvolumen von 4 Stunden am günstigsten? Rechnung oder Begründung anhand der Schaubilder!

$Peter: f(x) = 0{,}15 \cdot 240 = 36$

$Sabine: f(x) = 30$

$Hans: f(x) = 0{,}09 \cdot 240 + 9 = 30{,}6$

Entweder wir setzen die Zeit in Minuten in die Gleichungen aus a) ein oder wir lesen am Schaubild ab: die Flatrate von Sabine ist am günstigsten!

6. Aufgabe

8 Orangen wiegen in einem Holzkorb 2 kg, 12 Orangen wiegen im gleichen Korb 2,6 kg.

a) Wie schwer ist der Korb und wie schwer ist eine einzelne Orange?

4 Orangen erhöhen das Gewicht um 600 g. Daher wiegen 4 Orangen 600g oder 1 Orange wiegt 150g. 8 Orangen wiegen dann 1200 g und der Korb wiegt 800g.

b) Stelle eine Funktionsgleichung *Anzahl Orangen -> Gewicht des Korbes mit den Orangen* auf.

Entweder nehmen wir die Angaben aus Aufgabe a) und können das Ergebnis direkt hinschreiben:

$$f(x) = 150 \cdot x + 800$$

Oder wir rechnen mit 2 Punkten P(8;2000) und Q(12;2600) die Steigung und den y-Achsenabschnitt aus:

$$Steigung: \; m = \frac{2600 - 2000}{12 - 8} = \frac{600}{4} = 150$$

$$y = m \cdot x + n$$

$$2000 = 150 \cdot 8 + n$$

$$n = 2000 - 1200 = 800$$

$$f(x) = 150 \cdot x + 800$$