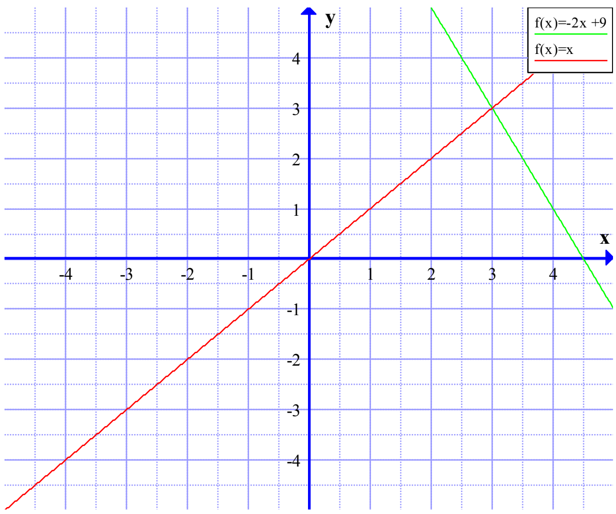
Lineare Gleichungssysteme

Skript

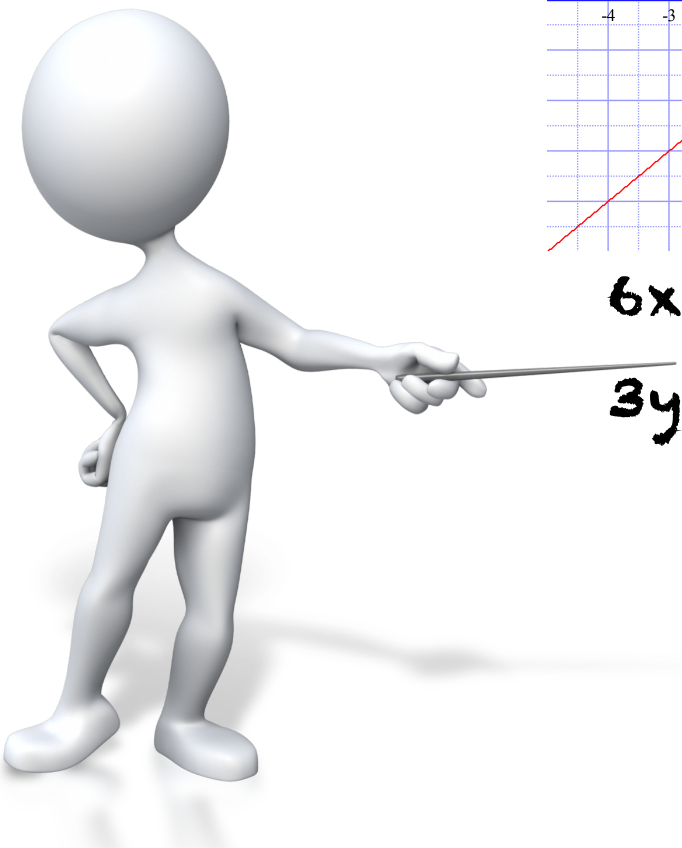
Beispiele

Musteraufgaben



$$6x + 3y = 27$$

$$3y = 3x$$



Impressum

Mathefritz Verlag
Jörg Christmann
Pfaffenkopfstr. 21E
66125 Saarbrücken

verlag@mathefritz.de
www.mathefritz.de
www.mathestunde.com

Autoren

Dr. Jürgen A. Schmidt
Jörg Christmann

Nutzungsbedingungen

Inhalt

1 Lineare Gleichungen 4
1.1 Einstieg 4
1.2 Beispielaufgabe 1 4
1.3 Beispielaufgabe 2 5

2 Gleichungen lösen 6
2.1 Beispiele 6
2.2 Beispielaufgabe 7

3 Lineare Gleichungen mit 2 Variablen 8
3.1 Einstiegsaufgabe 8
3.2 Beispielaufgabe 9

4 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen: zeichnerische Lösung 10
4.1 Einstiegsaufgabe 10
4.2 Beispielaufgaben 11

5 Rechnerische Lösung: Gleichsetzungsverfahren 12
5.1 Einstiegsaufgabe 12
5.2 Beispielaufgaben 13

6 Rechnerische Lösung: Einsetzungsverfahren 14
6.1 Einstiegsaufgabe 14
6.2 Beispielaufgaben 15

7 Rechnerische Lösung: Additionsverfahren 15
7.1 Einstiegsaufgabe 15
7.2 Beispielaufgaben 17
7.3 Komplexe Beispielaufgabe mit Lösung 18

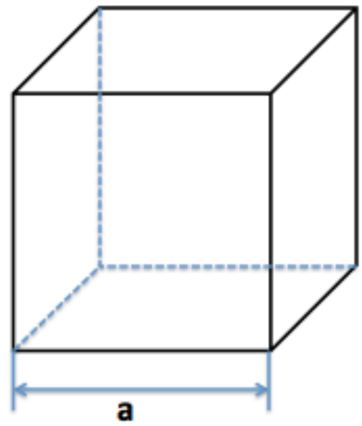
8 Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen 19
8.1 Einstiegsaufgabe 19
8.2 Beispielaufgabe 21

9 Lineare Gleichungssysteme – Aufgaben 22
9.1 Zu 1 und 2 Lineare Gleichungen lösen 22
9.2 Zu 3 Lineare Gleichungen mit 2 Variablen 22
9.3 Zu 4 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen: zeichnerische Lösung 22
9.4 Zu 5, 6 und 7 Rechnerische Lösungen 22
9.5 Zu 8 Gleichungssysteme mit 3 Variablen 24

10 Lösungen - Aufgaben Lineare Gleichungssysteme 25

1 Lineare Gleichungen

1.1 Einstieg



Ein Würfel hat 12 gleichlange Kanten und 6 gleichgroße Quadrate. Bezeichnet man eine Kantenlänge mit a, dann ist die Gesamtlänge L der Kanten L = 12 a und die Gesamtoberflache O des Würfels $O = 6\ a^2$.

Das Volumen V des Würfels ist $V = a^3$.

Beispiel: für a = 3 cm ergibt sich L = 36 cm, O = 45 cm^2 und V = 27 cm^3.

Die Rechenausdrücke 12 a, 6 a^2 und a^3 sind Beispiele für **Terme**. Terme enthalten neben Zahlen **Variablen** (man nennt diese auch „Unbekannte"), die durch Zahlen ersetzt werden können, um den Wert des Terms zu berechnen. Kennt man diesen Wert, so erhält man eine **Gleichung**, z.B. 12 a = 36, mit der sich a bestimmen lässt.

Eine Gleichung besteht aus 2 Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden (gleichgesetzt) sind. Beispiele: 3x = 5; 2a + 3b = 12; 5 y = 10 x, y = 3x +2, $a^3 = 8$

1.2 Beispielaufgabe 1

Nils macht in 50 min seine Hausaufgaben für Deutsch und Mathe, für Mathe braucht er 15 min. Wie lange braucht er für Deutsch?

Lösung: Wir setzten x für die gesuchte Deutsch-Zeit. Zusammen mit Mathe ergibt dies die 50 min. Also ist x + 15 = 50 und damit x = 35.

Antwort: Deutsch macht er in 35 min.

Eine Gleichung der Form ax + b = 0 mit $a, b, x \in \mathbb{R}$ heißt **Lineare Gleichung mit einer Variablen (Unbekannten).** Beispiel von Nils: x – 35 = 0, dabei ist a =1 und b = -35.

1.3 Beispielaufgabe 2

Amelie hat 3 € für die Mittagspause. Sie möchte ein Käsesandwich und Salat essen. Das Brötchen kostet 30 Cent, 100 g Edamerkäse 1,20 € und 100 g Salat 1,60 €. Wie viel Gramm Käse erhält sie jeweils auf das Brötchen, wenn sie unterschiedlich viel Salat nimmt?

Lösung:

Wir setzen x für den Preis des Käses und y für den Preis des Salats in Cent. Dann ist $x + y + 30 = 300$. Wenn sie 150 g Salat nimmt, dann kostet das 240 Cent, und für Käse sind noch $300-240-30 = 30$ Cent übrig. Sie erhält dafür $30/120 = 25$ g Käse. Bei 75 g Salat für 120 Cent erhielte sie für 150 Cent Käse, das wären 125 g! Das ist viel zu viel für 1 Brötchen!

Eine Gleichung der Form $ax + by + c = 0$ mit $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ heißt
Lineare Gleichung mit zwei Variablen (Unbekannten).
Beispiel von Amelie: $x + y - 270 = 0$ mit $a = 1$, $b = 1$ und $c = -270$.

2 Gleichungen lösen

Um Gleichungen zu lösen ist es oft nötig, sie zuerst zu vereinfachen. Erst werden

- gleiche Terme zusammengefasst und dann
- Terme oder Zahlen auf beiden Seiten addiert oder subtrahiert, oder
- beide Seiten mit demselben Term oder derselben Zahl (≠ 0) multipliziert oder dividiert.

2.1 Beispiele

- Zahl addieren: x - 4 = 16 | 4 addieren, also +4

  x – 4 + 4 = 16 + 4

  x = 20

- Terme zusammenfassen und subtrahieren:

  19 y + 16 – y + 8 = 6 y | 19 y – y und 16 + 8 zusammenfassen

  18 y + 24 = 6 y | 6 y subtrahieren, also - 6 y

  12 y + 24 = 6 y – 6 y = 0 | - 24

  2 y +24 – 24 = 0 – 24

  12 y = - 24

- durch Zahl dividieren: 12 y = - 24 | durch 12 teilen, also :12

  $y = -\frac{24}{12} = -2$

- mit Term multiplizieren: $\frac{1}{2a} = 5$ | mit 2 a multiplizieren

  $1 \cdot \frac{2a}{2a} = 5 \cdot 2a$

  $1 = 10a$ | : 10

  $a = \frac{1}{10}$

Bei folgendem Beispiel muss man auch auf die **Klammerregeln** achten:

Löse die Gleichung 4 · (5x – 10) + 50 = 15 x – (100 – 6x) | ausklammern

4 · 5x – 4 · 10 + 50 = 15 x – 100 – (- 6x) | ausklammern

20 x – 40 + 50 = 15 x - 100 + 6x | zusammenfassen

20 x + 10 = 21 x – 100 | – 21 x – 10

20 x – 21 x + 10 - 10 = 21 x – 21 x – 100 + 10 | zusammenfassen

- x = - 90 | · (-1)

x = 90

2.2 Beispielaufgabe

Sören macht in 50 min seine Hausaufgaben, für Mathe braucht er halb so viel Zeit wie für Englisch; dazwischen macht er 5 min Pause. Wie lange braucht er für Englisch?

Lösung:

Wir setzten x für die gesuchte Englisch-Zeit. Dann ist $\frac{1}{2}x$ die Zeit für Mathe. Zusammen mit der Pause ergibt dies die 50 min.

Also ist $x + \frac{1}{2}x + 5 = 50$ | x zusammenfassen

$\frac{3}{2}x + 5 = 50$ | – 5

$\frac{3}{2}x = 45$ | : $\frac{3}{2}$ (durch Bruch teilen = mit Kehrbruch

$x = 45 \cdot \frac{2}{3} = \frac{90}{3} = 30$

Antwort: Englisch macht er in 30 min.

3 Lineare Gleichungen mit 2 Variablen

3.1 Einstiegsaufgabe

Nico und sein Bruder Emilio sind zusammen 28 Jahre alt. Wie alt sind sie?

Diese Frage kann man nicht eindeutig beantworten, denn wenn zum Beispiel Nico 19 Jahre alt ist, dann muss Emilio 9 sein. Oder Nico ist 14, dann ist Emilio sein Zwillingsbruder. Es gibt also mehrere Lösungen!

Alle diese Lösungen kann man mit einer Gleichung mit 2 Variablen erhalten. Dazu setzen wir x für das Alter von Nico und y für das von Emilio.

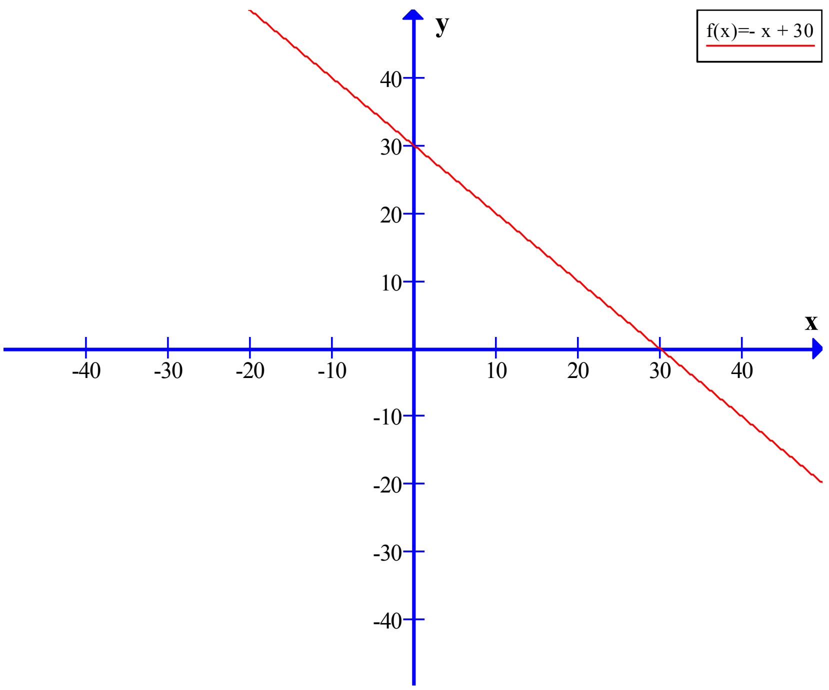
Dann gilt die Gleichung: $x + y = 28$.

Durch Umformen erhält man die Gleichung $y = -x + 28$.

Einsetzen von Werten für x ergeben Werte für y:

x (Nico)	19	14	10	8	5	1
y (Emilio)	-19+28=9	14	18	20	23	27

Die Gleichung $y = -x + 30$ ist die Funktionsgleichung der linearen Funktion $f: x \rightarrow -x + 30$. Wie jede Funktionsgleichung lässt sie sich als Gerade im Koordinatensystem darstellen. Sie hat also unendlich viele Lösungen.



Merke:

Die lineare Gleichung mit 2 Variablen ax + by + c = 0 mit a, b, c, x, y ϵ $\mathbb{R}$ lässt sich zur linearen Funktionsgleichung umformen:

y = m x + n mit m = $-\frac{a}{b}$ und n = $-\frac{c}{b}$.

Sie hat unendlich viele Lösungspaare (x; y) und kann als Gerade dargestellt werden.

Beispiel mit Nico und Emilio: a=1, b=1, c=-30, m=-1, n= -(-30) = +30

3.2 Beispielaufgabe

Gib die Lösungen der Gleichung 12 x + 4y – 6 = 0 an. Zeichne die Lösungsgerade.

Es gibt 2 Lösungswege für diese Aufgabe.

a) Lösung durch Umformen der Gleichung:

$12x + 4y - 6 = 0 \quad | - 12\,x + 6$

$4y = -12x + 6 \quad | : 4$

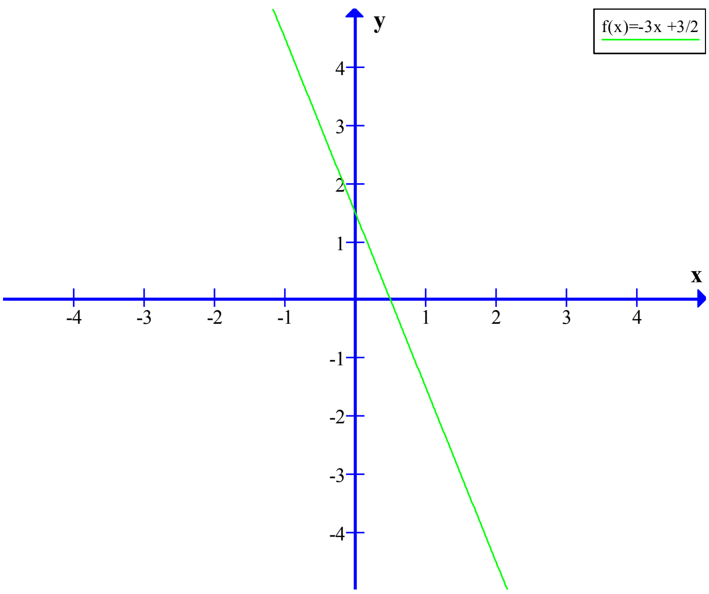
$y = -3x + \frac{3}{2}$

b) Lösung mittels m und n:

a = 12, b = 4, c = - 6, also ist m = $-\frac{12}{4} = -3$ und n = $-\left(-\frac{6}{4}\right) = \frac{3}{2}$.

Damit ergibt sich die Gleichung $y = -3x + \frac{3}{2}$.

Lösungsgerade:



4 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen: zeichnerische Lösung

4.1 Einstiegsaufgabe

Eine Privat-Disco ist angesagt! Petra lädt ihre Freunde ein, 5 Mädchen und 3 Jungs. Die Mädchen trinken zusammen doppelt so viel Cola wie die Jungs, aber essen gleich viele Donuts. Insgesamt werden 21 Cola verbraucht. Wie viele Cola trinkt durchschnittlich 1 Mädchen bzw. 1 Junge?

Lösung:

Wir setzen x für die Anzahl der von 1 Mädchen getrunkenen Cola und y entsprechend für 1 Junge.

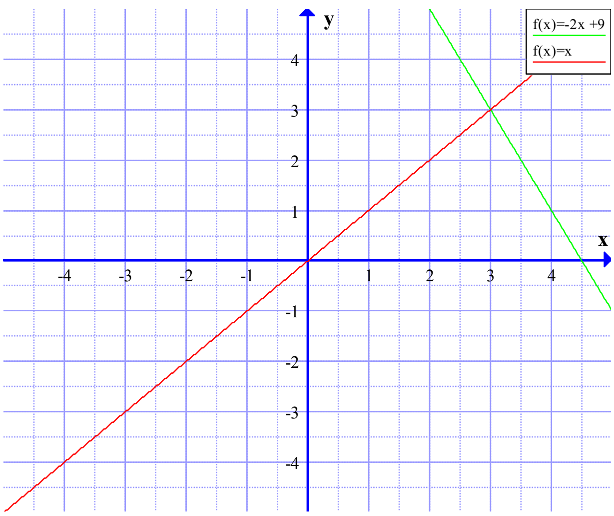
Dann ist $6x + 3y = 27$.

Da die 3 Jungs halb so viel Cola trinken wie die Mädchen ist ebenso $3y = \frac{1}{2} \cdot 6x$.

Dies sind 2 lineare Gleichungen mit 2 Variablen. Wir können sie als Funktionsgleichungen schreiben und als Geraden in einem Koordinatensystem darstellen; dazu werden die Gleichungen zur besseren Übersicht nummeriert:

(I)	$6x + 3y = 27$	I – 6x
(II)	$3y = \frac{1}{2} \cdot 6x$	I : 3

(I)	$3y = 27 - 6x$	I : 3
(I)	$y = 9 - 2x$	
(II)	$y = x$	

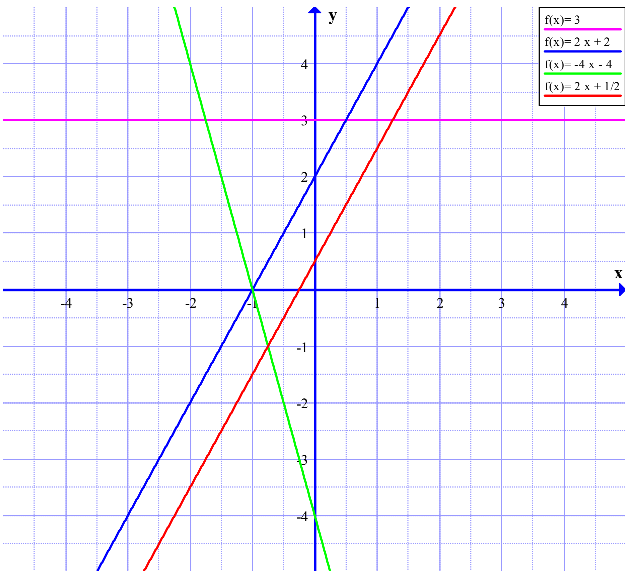


Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt (3; 3). Damit ergibt sich als Antwort: Jeder Junge und jedes Mädchen trinkt durchschnittlich 3 Cola.

Merke:
Zwei lineare Gleichungen mit 2 Variablen x und y nennt man **lineares Gleichungssystem mit 2 Variablen**. Das lineare Gleichungssystem hat genau 1 Lösungspaar (x; y), wenn die Geraden sich schneiden.
Sind die Geraden parallel zueinander, dann hat das System keine Lösung. Sind beide Geraden identisch, dann gibt es unendlich viele Lösungspaare.

4.2 Beispielaufgaben

a) $y = 2x + \frac{1}{2}$	b) $y = 2x + 2$	c) $y = 2x + \frac{1}{2}$
$y = -4x - 4$	$y = 3$	$y = 2x + 2$
Lösungspaar: $(-\frac{3}{4}; -1)$	Lösungspaar: $(\frac{1}{2}; 3)$	Keine Lösung



5 Rechnerische Lösung: Gleichsetzungsverfahren

5.1 Einstiegsaufgabe

Opa Heinrich ist jetzt 9 mal so alt wie Enkelin Lisa. In 4 Jahren ist er nur noch 7 mal so alt. Wie alt sind die beiden jetzt?

Lösung:

Wir setzen y für das Alter des Opa, x für Lisas Alter. Dann ist

(I) $y = 9x$

In 4 Jahren ist Opa y + 4 und Lisa x + 4 Jahre alt. Also ist

(II) $y + 4 = 7 \cdot (x + 4) \Leftrightarrow y + 4 = 7x + 28$ I -4

(II) $y = 7x + 24$

Um die Lösung zu berechnen können wir die beiden Gleichungen „gleichsetzen“, da y jeweils alleine auf einer Seite beider Gleichungen steht. Damit erhält man eine Gleichung mit nur 1 Variablen:

(I) = (II): $9x = 7x + 24$ I – 7 x

$2x = 24$ I : 2

$x = 12$

Antwort:

Lisa ist 12 Jahre alt, Opa ist ein Methusalem von 9 mal 12 = 108 Jahren.

In 4 Jahren ist er der älteste Mann Deutschlands!

Merke:

Um das Gleichsetzungsverfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems einsetzen zu können muss in beiden Gleichungen derselbe Term mit derselben Variablen auf einer Seite der Gleichungen stehen.

5.2 Beispielaufgaben

Löse mit dem Gleichsetzungsverfahren!

Beispiel a)	Beispiel b)
(I) $y = 2x + \frac{1}{2}$ (II) $y = -4x - 4$	(i) $\frac{2}{3}y + 1 = 3x$ (ii) $-\frac{4}{3}y = 3x$
Lösung: (II) und (I) gleichsetzen: $2x + \frac{1}{2} = -4x - 4$ I ordnen $2x + 4x = -4 - \frac{1}{2}$ I zusammenfassen $6x = -4{,}5$ $x = -0{,}75 = -\frac{3}{4}$	Lösung: (i) und (ii) gleichsetzen: $\frac{2}{3}y + 1 = -\frac{4}{3}y$ $\frac{2}{3}y + \frac{4}{3}y = -1$ $\frac{6}{3}y = -1$ $2y = -1$ $y = -\frac{1}{2}$
x in (II) eingesetzt ergibt $y = -4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - 4$ $y = 3 - 4$ $y = -1$	y in (ii) eingesetzt ergibt $-\frac{4}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) = 3x$ $\frac{4}{6} = 3x$ $\frac{2}{3} = 3x$ $x = 2$
Lösungspaar: $(-\frac{3}{4}; -1)$	Lösungspaar: $(2; -\frac{1}{2})$

6 Rechnerische Lösung: Einsetzungsverfahren

6.1 Einstiegsaufgabe

Elli und Arthur sind ziemlich sparsam. Elli hat 142 € gespart, Arthur 85 €. Beide haben das Geld auf Sparbüchern und auf Girokonten geparkt, Arthur hat auch noch eine Spardose mit 40 €. Elli hat 4 mal so viel Geld wie Arthur auf dem Sparbuch und doppelt so viel auf dem Girokonto. Wie viel Geld habe sie jeweils auf ihren Konten?

Lösung:

Wir setzen für das Geld von Arthur auf dem Sparkonto x und auf dem Girokonto y. Dann ist

(I) $x + y + 40 = 85 \rightarrow y = - x + 45$

Für Elli ist dann

(II) $4x + 2y = 142$

Wenn nun $y = - x + 45$ in (II) eingesetzt wird, dann erhalten wir eine Gleichung mit nur einer Variable:

(III) $4x + 2 \cdot (- x + 45) = 142$ I ausklammern

$4x - 2x + 90 = 142$ I zusammenfassen

$2x = 52$ I : 2

$x = 26$

x in (I) eigesetzt ergibt $y = -26 + 45 = 19$.

Antwort:

Arthur hat 26 € auf dem Sparkonto, Elli $4 \cdot 26$ € = 104 €.

Auf dem Girokonto hat Arthur 19 € und Elli $2 \cdot 19$ € = 39 €.

Merke:

Das Einsetzungsverfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems kann dann sinnvoll verwendet werden, wenn eine der beiden Gleichungen eine alleinstehende Variable enthält.

6.2 Beispielaufgaben

Löse mit dem Einsetzungsverfahren.

Beispiel a)	Beispiel b)
(I) $2x + 4y = 16$ (II) $y = -2x + 1$	(i) $\frac{2}{3}y - \frac{2}{3} = 3x + 2$ (ii) $\frac{1}{3} - \frac{4}{3}y = x$
Lösung: y aus (II) in (I) einsetzen: $2x + 4(-2x + 1) = 16$ I ausklammern $2x - 8x + 4 = 16$ I zusammenfassen $-6x = 12$ $x = -2$	Lösung: x aus (ii) in (i) einsetzen: $\frac{2}{3}y - \frac{2}{3} = 3 \cdot (\frac{1}{3} - \frac{4}{3}y)$ $\frac{2}{3}y + 3 \cdot \frac{4}{3}y = 1 + \frac{2}{3}$ $\frac{14}{3}y = \frac{5}{3}$ $y = \frac{5}{14}$
x in (II) eingesetzt ergibt $y = (-4) \cdot (-2) + 1 = 8 + 1$ $y = 9$	y in (ii) eingesetzt ergibt $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{14}$ $x = \frac{14}{3 \cdot 14} - \frac{20}{3 \cdot 14} = -\frac{6}{3 \cdot 14} = -\frac{1}{7}$
Lösungspaar: $(-2 ; 9)$	Lösungspaar: $(\frac{5}{14}; -\frac{1}{7})$

7 Rechnerische Lösung: Additionsverfahren

7.1 Einstiegsaufgabe

Familie Fröhlich (2 Erwachsene, 3 Kinder) geht in den Zoo, es kostet insgesamt 29,50 €.
Letzte Woche war Markus, der Vater, schon alleine mit Jonny dort, es kostete 12,50 €.
Was ist der Eintrittspreis für Erwachsene, für Kinder?

Lösung:

Wir bezeichnen den Preis für 1 Erwachsenen mit x und den für 1 Kind mit y. Man kann nun 2 Gleichungen aufstellen:

1.Gleichung: $2x + 3y = 29{,}5$

2.Gleichung: $x + y = 12{,}5$

Wenn wir durch Addition oder Subtraktion beider Gleichungen in der ersten Gleichung einen Faktor, zum Beispiel 2x, „wegmachen“ können, dann erhalten wir eine Gleichung nur mit 1 Variablen.

Multiplikation der 2.Gleichung mit 2 ergibt: 3. Gleichung: $2x + 2y = 25$

Wir subtrahieren nun die 3. Gleichung von der 1.Gleichung:

$2x + 3y - (2x + 2y) = 29{,}5 - 25$ | Klammer auflösen

$2x + 3y - 2x - 2y = 4{,}5$ | zusammenfassen: $2x - 2x = 0$, $3y - 2y = y$

$y = 4{,}5$

Den Wert für x erhält man durch Einsetzen von y in eine der ursprünglichen Gleichungen:

$y = 4{,}5$ in die 2. Gleichung eingesetzt ergibt $x = 12{,}5 - 4{,}5 = 8$.

Ergebnis:

Der Eintritt für Kinder kostet 4,50 €, Erwachsene kosten 8 €.

Merke:

Um das Additionsverfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems anzuwenden ist es notwendig, dass durch Addition oder Subtraktion der beiden Gleichungen eine der beiden Variablen wegfällt.

7.2 Beispielaufgaben

Löse mit dem Additionsverfahren.

Beispiel a)	Beispiel b)
(I) $2x + 3y = 14$ (II) $x - 3y = 10$	(I) $-2(x + 3) + 2y = x - y + 3$ (II) $x - (y + 3x) = 2$
Lösung: (II) zu (I) addieren: $2x + 3y + x - 3y = 14 + 10$ $3x = 24$ $x = 8$	(I) $-2x - 6 + 2y = x - y + 3$ (I*) $-3x + 3y = 9$ (II) $x - y - 3x = 2$ (II*) $-2x - y = 2$
x in (II) eingesetzt ergibt $-3y = 10 - 8 = 2$ $y = -\frac{2}{3}$	Damit y wegfallen kann wird (II*) mit 3 multipliziert: (IV) $-6x - 3y = 6$
Lösungspaar: $(8\,;-\frac{2}{3})$	(IV) zu (I*) addieren: $-9x = 15$ $x = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$
	x in (II*) eingesetzt ergibt $-y = 2 + 2 \cdot (-\frac{5}{3}) \quad \vert \cdot (-1)$ $y = -2 + \frac{10}{3} = -\frac{6}{3} + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$
	Lösungspaar: $(-\frac{5}{3}\,;\frac{4}{3})$

7.3 Komplexe Beispielaufgabe mit Lösung

Hier noch eine etwas schwierigere Beispielaufgabe, mit Lösung.
Addiere zu einer zweistelligen Zahl das 4-fache ihrer Quersumme, das Ergebnis ist 39. Wenn die Ziffern der Zahl vertauscht werden, ergibt sich eine neue Zahl, die durch 3 geteilt 17 ergibt. Berechne die Zahl.

Lösung:

Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist die Summe der beiden Ziffern. Diese Ziffern müssen wir finden. Wir bezeichnen deshalb die Zehnerziffer mit x und die Einerziffer mit y.
Beispiel: 85 hat die Zehnerziffer $x = 8$ und die Einerziffer $y = 5$, also beschreibt der Term $10x + y$ diese Zahl. Die Quersumme ist $x + y = 8 + 5 = 13$.

Somit ist (I) $10x + y + 4\cdot(x + y) = 39$ | zusammenfassen
und (II) $(10y + x) : 3 = 17$ | Klammer auflösen

(I) $14x + 5y = 39$ | nach y auflösen
(II) $\frac{10}{3}y + \frac{1}{3}x = 17$ | nach y auflösen

(I) $y = -\frac{14}{5}x + \frac{39}{5}$ | $\cdot 10$
(II) $y = -\frac{1}{10}x + \frac{51}{10}$ | $\cdot 10$

(III) $10y = -28x + 78$
(IV) $10y = -x + 51$

(III) und (IV) gleichsetzen (Gleichsetzungsverfahren):

(V) $-28x + 78 = -x + 51$ | zusammenfassen
$-27x = -27$
$x = 1$

x = 1 in (IV) eingesetzt ergibt **y = 5**

Antwort: Die gesuchte Zahl ist 15.

8 Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen

8.1 Einstiegsaufgabe

Tick, Trick und Track zählen ihre bunten Smarties. Tick hat insgesamt 48, Trick 40 und Track 43. Bei Trick sind 10 davon GELB und Tack hat 4 in ROT. Tick hat doppelt so viele ROT wie Trick. Trick und Track haben gleich viele in BLAU, das sind doppelt so viele wie Tick in BLAU hat. Track hat nur die Hälfte von Tick in GELB. Wie viele rote, blaue und gelbe Smarties haben sie jeweils?

Lösung:

Wir setzen x für Ticks ROT, y für sein BLAU und z für sein GELB. Dann gilt:

Tick (I) $x + y + z = 48$

Trick (I) $\frac{1}{2}\ x + 2\ y + 10 = 40$

Track (I) $4 + 2\ y + \frac{1}{2}\ z = 33$

Diese 3 Gleichungen bilden ein **lineares Gleichungssystem mit 3 Variablen**. Es kann gelöst werden, indem man erst eine Variable in 2 der 3 Gleichungen mit einem der drei Verfahren entfernt und danach das entstandene Gleichungssystem mit 2 Variablen löst. Diese Variable muss jedoch in allen drei Gleichungen auftreten. In diesem Beispiel ist das nur die Variable y.

Lösungsweg:

Erst das Einsetzungsverfahren mit y aus Tick (I) anwenden, danach das Additionsverfahren anwenden.

Tick (II) $y = 48 - x - z$

Einsetzen von y aus (II) in Trick (I) und Track (I):

Trick (II) $\frac{1}{2} x + 2 \cdot (48 - x - z) + 10 = 40$

Track (II) $4 + 2 \cdot (48 - x - z) + \frac{1}{2} z = 33$

Das ist nun ein Gleichungssystem mit 2 Variablen x und z.

Klammern aufgelöst und zusammengefasst ergibt:

Trick (II) $-\frac{3}{2}x - 2z = -66$ $\quad | \cdot (-2) \rightarrow$ $3x + 4z = 132$

Track (II) $-2x - \frac{3}{2}z = -67$ $\quad | \cdot (\frac{3}{2}) \rightarrow$ $-3x - \frac{9}{4}z = -100{,}5$

Mit dem Additionsverfahren ist $4z - \frac{9}{4}z = 132 - 100{,}5$

$$\frac{7}{4}z = 31{,}5$$

$$z = \frac{126}{7} = 18$$

z = 18 eingesetzt in Track (I) ergibt $4 + 2y + 9 = 33 \rightarrow y = 10$

z = 18 und y = 10 eingesetzt in Tick (I) ergibt $x + 10 + 18 = 48 \rightarrow x = 20$

Antwort:

Tick hat 20 rote, 10 blaue und 18 gelbe Smarties,

Trick hat 10 rote, 20 blaue und 10 gelbe Smarties,

Tick hat 4 rote, 20 blaue und 9 gelbe Smarties.

Merke:

Ein lineares Gleichungssystem mit 3 Variablen löst man, indem man mit einem der drei Verfahren erst eine der 3 Variablen entfernt und dann das dadurch entstehende Gleichungssystem mit 2 Variablen löst. Die Lösung (x; y; z) bezeichnet man als **Lösungstripel**.

8.2 Beispielaufgabe

Löse das Gleichungssystem

(I) $2x - 2y + 4z = 5$

(II) $6x - 4z = 20$

(III) $x - 2y = 39$

Mit dem Additionsverfahren addieren wir (I) und (II):

(IV) $2x - 2y + 6x = 5 + 20 \rightarrow 8x - 2y = 25$

Damit haben wir 2 Gleichungen mit x und y als Variable:

(III) $x - 2y = 100$

(IV) $8x - 2y = 25$

Wir subtrahieren (IV) von (III):

(V) $x - 8x = 39 - 25 = 14$

$x = -2$

x in (III) eingesetzt ergibt $y = -20{,}5$;

x und y in (I) eingesetzt ergibt $z = 8$.

Antwort: Das Lösungstripel ist (-2; -20,5; 8).

9 Lineare Gleichungssysteme – Aufgaben

9.1 Zu 1 und 2 Lineare Gleichungen lösen

Aufgabe 1
Sören spielt oft Fußball, dafür ist er immer 2 Stunden von zuhause weg. Für den Weg zum Platz und zurück braucht er je 12 Minuten, und dann noch 5 Minuten zum Umziehen. Wie lange kann er Fußball spielen? Bestimme dazu eine Gleichung!

Aufgabe 2
Löse die Gleichungen:

a) $4x - 10 = 2$

b) $-2 \cdot (2x + 8) - 12 = 0$

c) $5x - 24\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right) = x - 3$

9.2 Zu 3 Lineare Gleichungen mit 2 Variablen

Aufgabe 3
Forme in eine lineare Funktionsgleichung der Form $y = mx + b$ um:

a) $-2x + 4y + 4 = 0$ b) $\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$

9.3 Zu 4 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen: zeichnerische Lösung

Aufgabe 4

Löse das Gleichungssystem zeichnerisch. Bestimme dazu erst die Geradengleichungen.

a) $y + 2x - 2 = 0$
$\frac{1}{4} \cdot (y - 8) + 3 = \frac{1}{2} \cdot (x + 2)$

b) $\frac{1}{4} \cdot (3y - x + 3) = -\frac{3}{2}$
$23x + 101 = -23 \cdot (3x - 2y) - 83$

9.4 Zu 5, 6 und 7 Rechnerische Lösungen

Aufgabe 5
Nils ist 8 Jahre älter als seine Schwester Amelie. Vor 5 Jahren war er 3 mal so alt wie sie. Wie alt sind die beiden?

Aufgabe 6
Löse mit dem Gleichsetzungsverfahren:

a) $y = 3x - 2$
$y = 6x + 22$

b) $x = 2 + 5y$
$x = 3y - 2$

c) $2x - y = 0$
$y = \frac{1}{2}x + 5$

d) $3y = 9x - 12$
$3y = 6x + 3$

e) $y + 3 = 0{,}25x + 4$
$y + 3 = 0{,}3x + 7$

f) $x = -\frac{5}{3}y + 10$
$x = \frac{4}{3}y + 1$

Aufgabe 7
Kinobesuch. Familie Innocenti (2 Erwachsene, 3 Kinder) bezahlt für Eintritt und 4 Eis zu je 1,30 € insgesamt 38,70 €. Nannette geht mit ihrer Freundin und ihrer Mutter auch dahin, die Mutter bezahlt 19,50 €. Was kostet der Eintritt für 1 Kind, und wie viel für 1 Erwachsenen?

Aufgabe 8
Klaus und Cherry jobben in den Ferien auf dem Pferdehof mit 37 Pferden. Es gibt dort doppelt so viele Stuten wie Hengste, und es gibt auch noch 4 Ponys. Wie viele Hengste und Stuten gibt es?

Aufgabe 9
Löse mit dem Einsetzungsverfahren:

a) $2y - 3x - 2 = -4x$
$y = x + 2$

b) $\frac{2}{3}x - 2 = 5y$
$x = 3\cdot(y - 2)$

c) $2x - y = 0$
$y = \frac{1}{2}x + 5$

d) $7y + 3x = 9y - 12$
$3x = 6y + 3$

e) $y + 37 = x + 4$
$2y + 99 - x = 0$

f) $\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}y + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x$
$x - 1 = \frac{5}{3}y$

Aufgabe 10
Emil kauft Obst für den Schulausflug ein. Er kauft für jeden der 25 Schüler der Klasse 8c eine Frucht, nämlich 12 Bananen und 13 Kiwis und bezahlt dafür 8,93 €.
Für die 22 Schüler in Klasse 8a kauft Patty 6 Bananen und 8 Kiwis und noch 8 Äpfel für 1,99 €, sie bezahlt 6,89 €. Was kostet 1 Banane und 1 Kiwi? Sind alle Angaben für die Berechnung nötig?

Aufgabe 11
Löse mit dem Additionsverfahren:

a) $x + y = 8$
$x - y = 4$

b) $7x + 5y = 10$
$-7x + 5y = -10$

c) $2x - y = 0$
$4x - y = 2$

d) $7y + 3x = -12$
$6y + 6x = -8$

e) $y + 21 = 6x - 9$
$\frac{1}{3}y - 38 - x = 0$

f) $3\left(x - \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{3} = y + \frac{2}{3}$
$x - 1 = \frac{5}{3}y$

Aufgabe 12
Wie viele Lösungen hat das Gleichungssystem?

a) $x + y = 8$
$-2x + 2y = -16$

b) $7x + 5y = 10$
$-70x - 50y = -100$

c) $2x = 6y + 22$
$2x = 6y - 23$

Aufgabe 13
Prüfe ob das Lösungspaar (x; y) eine Lösung des Gleichungssystem ist.

b) $-x + 2y = 2$
$2x + 2y = -1$

Lösung (1; 0,5)

b) $x + 5y = 10$
$2x = 6y - 2$

Lösung $(\frac{25}{8}; \frac{11}{8})$

c) $0{,}12345x + 0{,}25y = 0{,}25$
$27{,}77x + 0{,}25y = 0{,}25$

Lösung (0; 1)

Aufgabe 14
Löse das Gleichungssystem aus Aufgabe 4a) rechnerisch. Welches Verfahren bietet sich an?

9.5 Zu 8 Gleichungssysteme mit 3 Variablen

Aufgabe 15
Für den Kunstunterricht werden 160 grüne, blaue, gelbe und rote Papierblätter benötigt, jedes Blatt kostet 5 Cent. Von den Grünen werden halb so viele wie von den Blauen gekauft, zusammen so viel wie Rote. Von den Gelben reichen 10 Stück. Wie viele rote, grüne und blaue Blätter werden gekauft?

Aufgabe 16
Löse die Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten

a) (I) $2x + 5y + 10z = 20$
(II) $4x - 5y + 2z = 10$
(III) $x - z = 10$

b) (I) $0{,}5a + 2b - 3c = 0$
(II) $2a + 2b = 0{,}5$
(III) $a + 10c = 12$

10 Lösungen - Aufgaben Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1
x ist die gesuchte Zeit auf dem Platz in min.
Dann ist

$2 \cdot 12 + 2 \cdot 5 + x = 120$ I zusammenfassen
$24 + 10 + x = 120$ I – 34
$x = 120 - 34 = 86$

Antwort: Sören spielt 86 min Fußball.

Aufgabe 2

a) $4x - 10 = 2$ I + 10
$4x = 10 + 2 = 12$ I : 4
$x = 12 : 3 = 12/3 = 4$
$x = 4$

b) $-2 \cdot (2x + 8) - 12 = 0$ I Klammer ausmultiplizieren
$-2 \cdot 2x - 2 \cdot 8 - 12 = 0$ I zusammenfassen
$-4x - 16 - 12 = 0$ I + 16 + 12 = + 28
$-4x = 28$ I : (-4)
$x = -28/4$
$x = -7$

c) $5x - 24\,(1/4\,x - ½) = x - 3$ I Klammer ausmultiplizieren
$5x - 24 \cdot 1/4\,x - 24 \cdot (-1/2) = x - 3$ I zusammenfassen
$5 \quad x - 6x + 12 = x - 3$ I zusammenfassen
$-x + 12 = x - 3$ I + x + 3
$12 + 3 = x + x$ I zusammenfassen
$15 = 2x$ I : 2
$x = 15/2$

Aufgabe 3
a) $-2x + 4y + 4 = 0$ I + 2 x – 4
$4y = 2x - 4$ I : 4
$y = ½\,x - 1 \rightarrow m = 1/2,\ n = -1$

b) $½\,y - 1/3\,x + ¼ = 2/3\,x + -¾$ I + 1/3 x – ¼
$½\,y = 2/3\,x + 1/3\,x - ¾ - ¼$ I zusammenfassen
$½\,y = x - 1$ I * 2
$y = 2x - 2 \rightarrow m = 2,\ n = -2$

Aufgabe 4

a) (I) $y + 2x - 2 = 0 \quad | -2x + 2$

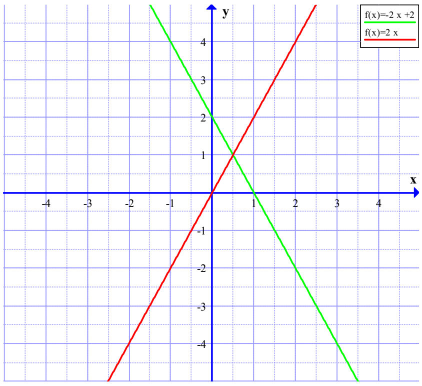
$y = -2x + 2$

(II) $\frac{1}{4} \cdot (y - 8) + 3 = \frac{1}{2} \cdot (x + 2) \quad |$ ausklammern

$\frac{1}{4} y - 2 + 3 = \frac{1}{2} x + 1 \quad | -1$

$\frac{1}{4} y = \frac{1}{2} x \quad | * 4$

$y = 2x$



Die Geraden schneiden sich im Punkt (1/2 ; 1), siehe Bild!

b) (I) $\frac{1}{4} \cdot (3y + x + 3) = -3/2 \quad |$ Klammern auflösen

$\frac{3}{4} y + \frac{1}{4} x + \frac{3}{4} = -3/2 \quad | -\frac{1}{4} x - \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} y = -\frac{1}{4} x - \frac{3}{4} - 6/4 \quad | : \frac{3}{4}$

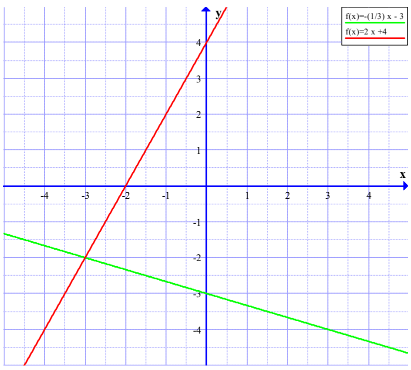
$y = -1/3\, x - 3$

(II) $23x + 101 = -23(3x - 2y) - 83 \quad |$ Klammern auflösen und + 83

$23x + 101 + 84 = -69x + 46y \quad | +69x$ und zusammenfassen

$92x + 184 = 46y \quad | : 46$

$2x + 4 = y$



Die Geraden schneiden sich im Punkt (-3 ; -2), siehe Bild!

Aufgabe 5

Wir setzen x für das Alter von Amelie, y für Nils‘ Alter. Dann ist

(I) $x + 8 = y$ und

(II) $3 \cdot (x - 5) = y - 5$

Um das Gleichsetzungsverfahren anzuwenden lösen wir (II) nach y auf:

(III) $3 \cdot (x - 5) + 5 = y$

Dies mit (I) gleichgesetzt und die Klammer ausmultipliziert ergibt

(IV) $3x - 15 + 5 = x + 8 \quad | - x + 10$

$2x = 18$

$x = 9$

x = 9 in (I) eingesetzt ergibt $y = 9 + 8 = 17$.

Antwort: Amelie ist 9 Jahre alt, Nils ist 17.

Aufgabe 6

a) $3x - 2 = 6x + 22 \quad \rightarrow \quad x = -8, y = -26$

b) $2 + 5y = 3y - 2 \quad \rightarrow \quad y = -2, x = -8$

c) $2x = \frac{1}{2}x + 5 \quad \rightarrow \quad x = 10/3, y = 20/3$

d) $9x - 12 = 6x + 3 \quad \rightarrow \quad x = 5; y = 11$

e) $0{,}25x + 4 = 0{,}3x + 7 \quad \rightarrow \quad x = -60; y = -14$

f) $-5/3\, y + 10 = 4/3\, y + 1 \quad \rightarrow \quad y = 3; x = 5$

Aufgabe 7

Kindereintritt = x, Erwachseneneintritt = y.

Dann ist

(I) $2x + 3y + 5{,}20 = 38{,}70$ und

(II) $x + 2y = 19{,}50 \rightarrow x = -2y + 19{,}50$

Mit dem Einsetzungsverfahren ist

$2 \cdot (\mathbf{-2y + 19{,}50}) + 3y + 5{,}20 = 38{,}70$

Klammer aufgelöst und zusammengefasst ergibt

$-4y + 39 + 3y = 33{,}50$ und damit

$y = 5{,}50$

Dies in (II) eingesetzt ergibt x = 8,50.

Antwort: Kinokarten für Kinder kosten 5,50 €, für Erwachsene 8,50 €.

Aufgabe 8
Anzahl der Stuten = x, Anzahl der Hengste = y.
Dann ist
(I) $x + y + 4 = 37$ und
(II) $x = 2y$

Einsetzungsverfahren: $\mathbf{2y} + y + 4 = 37 \rightarrow 3y = 33 \rightarrow y = 11 \rightarrow x = 22$

Antwort: Es gibt 22 Stuten und 11 Hengste.

Aufgabe 9

a) $2 \cdot \mathbf{(x + 2)} - 3x - 2 = -4x \rightarrow x = -2/3,\ y = 4/3$
b) $2/3 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{(y - 2)} - 2 = 5y \rightarrow y = -2,\ x = -12$
c) $2x - \mathbf{(½ x + 5)} = 0 \rightarrow x = 10/3,\ y = 20/3$
d) $7y + \mathbf{6y + 3} = 9y - 12 \rightarrow y = -3/5,\ x = 11/5$
e) $y + 37 = \mathbf{2y + 99} + 4 \rightarrow y = -66,\ x = -33$
f) $1/3\,x - \mathbf{(x - 1)} + 1/3 = 2/3\,x \rightarrow x = 1,\ y = 0$

Aufgabe 10
Die Anzahl der Schüler und die Anzahl der Äpfel ist in dieser Aufgabe nicht wichtig! Es geht hier nur um die Preise.

Preis einer Banane = x, einer Kiwi = y.
Dann ist
(I) $12x + 13y = 8{,}93$ und
(II) $\mathbf{6x} + 8y + 1{,}99 = 6{,}89$

Wir wollen das Additionsverfahren anwenden. Dazu wird (I) durch -2 dividiert, damit bei der Addition beider Gleichungen der x-Term wegfällt.

(III) $\mathbf{-6x} - 13/2\,y = -8{,}93/2$

Addieren von (II) und (III):
(IV) $8y - 13/2\,y + 1{,}99 = 6{,}89 - 8{,}93/2$ I zusammenfassen
$3/2\ y = 0{,}435$ I $\cdot$ 2/3 (Kehrbruch!)
$y = 0{,}29$
y = 0,29 in (I) eingesetzt ergibt
$12x + 13 \cdot 0{,}29 = 8{,}93 \rightarrow x = 0{,}43$

Antwort: 1 Banane kostet 43 Cent, 1 Kiwi kostet 29 Cent.

Aufgabe 11

a) 2 x **+ y – y** = 12 → x = 6, y = 2

b) **7x – 7 x** + 10 y = 0 → y = 0, x = 10/7

c) 2 x – y = 0 | multiplizieren mit -1
-2 x + y = 0 → -2 x + 4 x = 2 → x = 1, y = 2

d) 7 y + 3 x = – 12 | multiplizieren mit -2
-14 y – 6 x = 24 → -14 y + 6 y = 24 – 8 → y = 2, x = - 10/3

e) y + 21 = 6 x – 9 | multiplizieren mit – 1/3
- 1/3 y – 7 = - 2 x + 3 | zur 2. Gleichung addieren
- 7 – 38 – x = - 2 x + 3 | zusammenfassen
- 48 = - x → x = 48, y = 258

f) x – 1 = 5/3 y | multiplizieren mit – 3

(I) - 3 x + 3 = - 5 y
(II) 3 (x - 5/3) - 1/3 = y + 2/3 | Klammer auflösen und zusammenfassen
(III) 3 x – 5 = y + 1 | (I) zu (III) addieren
3 – 5 = - 5 y + y + 1 | zusammenfassen
-3 = - 4 y → y = ¾, x = 9/4

Aufgabe 12

a) y = 8 – x eingesetzt ergibt
– 2 x + 16 – 2 x = - 16 | zusammenfassen
- 4 x = - 32 → x = 8, y = 0
Das Gleichungssystem hat die eine Lösung (8; 0)

b) 2. Gleichung durch 10 dividieren ergibt die erste Gleichung.
Zur Geradengleichung y = - 7/5 x +2 umgeformt zeigt, dass dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, nämlich alle Punkte auf der Geraden.

c) Mit dem Gleichsetzungsverfahren ergibt sich
6 y + 22 = 6 y – 23 | – 6 y
22 = - 23 **falsch!**
Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Aufgabe 13

a) x = 1 und y = ½ in (I) – x + 2 y = 2 eingesetzt ergibt -1 + 1 = 0 ≠ 2. Das Lösungspaar (1; ½) ist nicht Lösung des Gleichungssystems.
Berechnen der Lösung mit dem Additionsverfahren:
2x –(-x) = - 1 – 2 → 3 x = -3 → x = -1, y = ½

b) Lösungswerte in die erste Gleichung eingesetzt ergibt 25/8 + 55/8 = 80/8 = 10, also richtig.
Lösungswerte in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt 50/8 = 66/8 - 16/8, also richtig. Das Lösungspaar ist die Lösung des Gleichungssystems.

c) (0; 1) in beiden Gleichungen eingesetzt ergibt richtige Gleichungen, es ist also die lösung des Gleichungssystems.

Aufgabe 14
Wegen (I) $y = -2x + 2$ ist das Einsetzungsverfahren geeignet.
Dies in (II) eingesetzt ergibt

$$\tfrac{1}{4} \cdot (\mathbf{-2x + 2} - 8) + 3 = \tfrac{1}{2} \cdot (x + 2) \qquad | \text{ Klammern ausrechnen}$$
$$-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} - 2 + 3 = \tfrac{1}{2}x + 1 \qquad | + \tfrac{1}{2}x - 1$$
$$\tfrac{1}{2} + 1 - 1 = x$$
$$x = \tfrac{1}{2}$$

$x = ½$ in (I) eingesetzt ergibt $y = -1 + 2 = 1$.

Antwort: Das Lösungspaar ist (1/2; 1).

Aufgabe 15
Anzahl der roten Blätter = x, grüne = y, Blaue = z.
Dann ist

(I) $x + y + z + 10 = 160$
(II) $2y = z$
(III) $x = y + z$

z aus (II) in (III) eingesetzt ergibt

(IV) $x = y + 2y = 3y$

x aus (IV) und z aus (II) eingesetzt in (I) ergibt

(V) $3y + y + 2y + 10 = 160$
$$6y = 150$$
$$y = 25 \quad \rightarrow \quad x = 50 \quad \rightarrow \quad z = 75$$

Antwort: Es werden 75 rote, 50 blaue und 25 grüne Blätter gekauft.

Aufgabe 16
Bei beiden Gleichungssystemen gibt es mehrere Wege, sie zu lösen. Hier wird der jeweils einfachste Weg beispielhaft beschrieben:

a) (I) zu (II) addieren: (IV) $6x + 12z = 30$
x = z + 10 aus (III) in (IV) einsetzen: (V) $6z + 60 + 12z = 30$
(VI) $18z = -30 \rightarrow z = 5/3$
z = 5/3 in (III) eingesetzt: $x = 35/3$
x und z in (I) eingesetzt: (V) $2 \cdot 35/3 + 5y + 10 * 5/3 = 20$
(V) zusammenfassen: $y = -4$

Lösungstripel (35/3; -4; 5/3)

b) (I) von (II) subtrahieren: (III) $2a - ½a - (-3c) = ½$
(III) zusammenfassen: $3/2\,a = -3c + ½ \quad | * 2/3$
$a = -2c + 1/3$

a in (III) eingesetzt: (IV) $-2c + 1/3 + 10c = 12$

(IV) zusammenfassen: $c = 35/24 \quad \rightarrow \quad a = -31/12$
a in (II) eingesetzt und zusammengefasst: $b = 17/3$

Lösungstripel (-31/12; 17/3; 35/24)