Klassenarbeit: **Quadratische Gleichungen, Ungleichungen, Parabeln**

1. Aufgabe
Wähle einen zweckmäßigen Ansatz und bestimme aus folgenden Angaben jeweils die Parabelgleichung in der allgemeinen Form!

a) Die Parabel hat die Nullstellen -1 und 5 und geht durch den Punkt (2/3)
b) Die Parabel hat den Scheitelpunkt (2/4) und verläuft durch den Ursprung.

2. Aufgabe
Löse die folgenden quadratischen Gleichungen mit einem Verfahren deiner Wahl.

a) $3x^2 - 12x + 9 = 0$ b) $(x-3)\cdot(x+6) = -18$ c) $\frac{2x^2+4}{x-1} = x$

3. Aufgabe
Löse die folgenden quadratischen Ungleichungen!

a) $x^2 - 4x + 4 < 25$ b) $-5x^2 + 20x + 20 \geq 5$

4. Aufgabe
Bestimme die Definitionsmenge des folgenden Wurzelterms: $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{75-3x^2}$

5. Aufgabe
Bestimme jeweils die Diskriminante und gib die Anzahl der Lösungen an:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ b) $x^2 - 2x + 25 = 0$

6. Aufgabe
Eine Fußgängerbrücke wird von einem parabelförmigen Bogen getragen. An seiner höchsten Stelle ist der Bogen 16m hoch und die Spannweite zwischen den beiden Fundamenten auf Wasserhöhe beträgt 62 m. Bestimme eine mögliche Funktionsgleichung für diese Parabel.

Lösungen

1. Aufgabe

Wähle einen zweckmäßigen Ansatz und bestimme aus folgenden Angaben jeweils die Parabelgleichung in der allgemeinen Form!

a) Die Parabel hat die Nullstellen -1 und 5 und geht durch den Punkt (2/3)

Nullstellenform: $f(x) = a(x+1)(x-5)$

Einsetzen des Punkte x=2, y=3:

$$3 = a(2+1)(2-5)$$
$$3 = a(3)(-3)$$
$$3 = -9a$$
$$a = -\frac{1}{3}$$

Damit lautet die Gleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x-5) = -\frac{1}{3}(x^2-4x-5) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

b) Die Parabel hat den Scheitelpunkt (2/4) und verläuft durch den Ursprung.

Scheitelpunkt-Form: $f(x) = a(x-2)^2 + 4$

Ursprung ist ein Punkt der Parabel x = 0; y = 0

Eingesetzt:

$$0 = a(0-2)^2 + 4$$
$$0 = 4a + 4$$
$$a = -1$$

Damit lautet die Funktion:

$$f(x) = -1(x-2)^2 + 4 = -1(x^2 - 4x + 4) + 4 = -x^2 + 4x - 4 + 4 = -x^2 + 4x$$

2. Aufgabe

Löse die folgenden quadratischen Gleichungen mit einem Verfahren deiner Wahl.

a)

$3x^2 - 12x + 9 = 0$ | :3

$x^2 - 4x + 3 = 0$ Faktorisieren erkennen!

$(x-1)(x-3) = 0$

$x_1 = 1;\ x_2 = 3$

Alternativ p-q-Formel:

$p = -4;\ \ q = 3$

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$

$x_1 = 1;\ x_2 = 3$

b)

$(x-3)\cdot(x+6) = -18$

$x^2 + 3x - 18 = -18$

$x^2 + 3x = 0$

$x(x+3) = 0$

$x_1 = 0;\ \ x_2 = -3$

c)

$\frac{2x^2+4}{x-1} = x$

$2x^2 + 4 = x \cdot (x-1)$

$2x^2 + 4 = x^2 - x$

$x^2 + x + 4 = 0$

$p = 1;\ \ q = 4$

$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4}$

Der Wert unter der Wurzel (Diskriminante) ist < 0 => keine Lösung!

3. Aufgabe

Löse die folgenden quadratischen Ungleichungen!

a)

$x^2 - 4x + 4 < 25$

$x^2 - 4x - 21 < 0 \quad Faktorisieren$

$(x-7)(x+3) < 0 \quad immer\ eine\ Klammer\ positiv,\ eine\ negativ!$

$(I)\ \ (x-7) < 0\ und\ (x+3) > 0$

$oder$

$(II)\ \ (x-7) > 0\ und\ (x+3) < 0$

$(I)\quad x < 7\ und\ x > -3 \quad x\ im\ offenen\ Intervall\ I = \left]-3;7\right[$

$(II)\ \ x > 7\ und\ x < -3 \quad => keine\ Lösung!$

b)

$$-5x^2+20x+20\geq 5$$
$$-5x^2+20x+15\geq 0 \quad |:-5 \quad \geq \textit{ Zeichen dreht sich um!}$$
$$x^2-4x-3\leq 0$$
$$x_{1/2}=2\pm\sqrt{4+3}=2\pm\sqrt{7}$$
$$L=\left[2-\sqrt{7};2+\sqrt{7}\right]$$

Gesucht ist anschaulich der Teil der Parabel $f(x)=x^2-4x-3$ unter der x-Achse.

4. Aufgabe

Bestimme die Definitionsmenge des folgenden Wurzelterms: $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{75-3x^2}$

Die Terme unter der Wurzel (Radikanten) müssen beide immer größer gleich null sein!

$$(I)\;\; x^2-1\geq 0$$
$$und$$
$$(II)\;\; 75-3x^2\geq 0$$

$$(I)\;\; x^2\geq 1 \quad d.h.\;\; x\geq 1 \;\; oder \;\; x\leq -1$$
$$(II)\;\; 75\geq 3x^2$$
$$(II)\;\; 25\geq x^2$$
$$(II)\;\; x^2\leq 25 \quad d.h.\;\; x\geq -5 \;\; oder \;\; x\leq 5$$

Es gilt jetzt, die Schnittmenge beider Lösungsintervalle zu bilden!

$$(I)\;\; L_1=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;\infty\right[$$
$$(II)\;\; L_2=\left[-5;5\right]$$
$$L_1\cap L_2=\left[-5;-1\right]\cup\left[1;5\right]$$

5. Aufgabe

Bestimme jeweils die Diskriminante und gib die Anzahl der Lösungen an:

a)

$$x^2-6x+9=0$$
$$p=-6$$
$$q=9$$
$$D=36-9=27$$
$$D>0$$
$$2\;\; Lösungen$$

b)

$$x^2-2x+25=0$$
$$p=-2$$
$$q=25$$
$$D=4-25=-21$$
$$D<0$$
$$Keine\;\; Lösung!$$

6. Aufgabe

Wir legen das eine Fundament in den Ursprung (0;0). Dann hat das 2. Fundament die Koordinaten (62;0). Das sind die 2 Nullstellen der Parabel. Der Höchste Punkt liegt in der Mitte der beiden Nullstellen in der Höhe 16 m, d.h. wir haben einen weiteren Punkt P(31;16).

In der Nullstellenform lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = a \cdot x \cdot (x - 62)$

Wir setzen den Punkt P (31;16) ein. *x = 31, y = f(x) = 16*

$$16 = a \cdot 31 \cdot (31 - 62)$$
$$16 = -961a$$
$$a = -\frac{16}{961}$$

$$f(x) = -\frac{16}{961}x(x - 62) \qquad \textit{Nullstellenform}$$
$$f(x) = -\frac{16}{961}x^2 + \frac{992}{961}x \qquad \textit{all. Form}$$