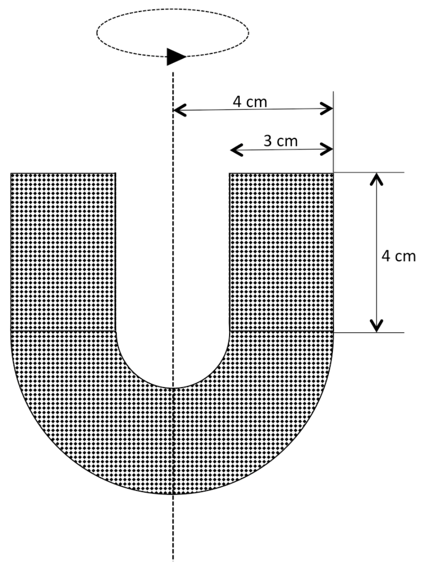
Klassenarbeit– Stereometrie – Körperberechnung Lösung

1. Aufgabe
Eine Orange hat einen Durchmesser von d = 8 cm.
Berechne Volumen und Oberfläche.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3;\ O = 4\pi r^2;\ r = \frac{d}{2}$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi * (8cm)^3 = 268{,}1cm^3$$
$$O = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi d^2 = \pi * (8cm)^2 = 201{,}1cm^2$$

2. Aufgabe
Berechne das Volumen und die Oberfläche des rechts abgebildeten Rotationskörpers (schaffierte Fläche). Stelle hierzu zunächst jeweils einen Rechenausdruck auf! Benenne jeweils die einzelnen Körper, die du zur Berechnung verwendest!



Hohlzylinder: Höhe h= 4 cm ;
innerer Radius r = 1 cm;
äußerer Radius R = 4 cm

Hohlkugel: innerer Radius s = r = 1 cm
äußerer Radius S = R = 4 cm

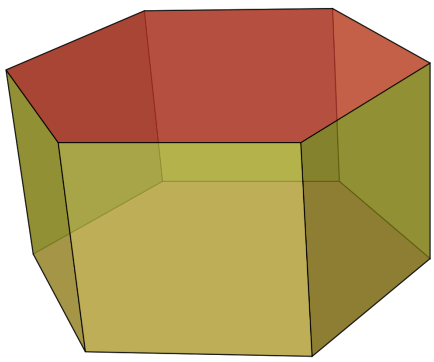
$$V_{Rotationskörper} = V_{Hohlzylinder} + \frac{1}{2}V_{Hohlkugel}$$
$$V_{Hohlzylinder} = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R^2 - r^2)$$
$$V_{Hohlkugel} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$$
$$V_{Rotationskörper} = \pi h(R^2 - r^2) + \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3) = \pi\left(h(R^2 - r^2) + \frac{2}{3}(R^3 - r^3)\right)$$
$$= \pi\left(4cm * ((4cm)^2 - (1cm)^2) + \frac{2}{3}((4cm)^3 - (1cm)^3)\right) = \pi(4cm * (15cm^2) + \frac{2}{3}(63cm^3)$$
$$= \pi(60cm^3 + 42cm^3) = \pi * 102cm^3 = 320{,}4cm^3$$

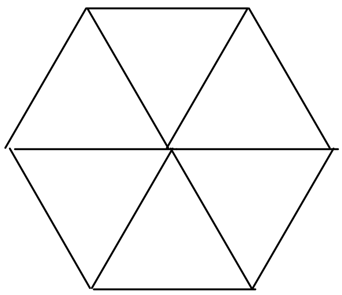
$$O = G_{Hohlzylinder} + M_{Zylinder\ außen} + M_{Zylinder\ innen} + \frac{1}{2}O_{Kugel\ außen} + \frac{1}{2}O_{Kugel\ innen}$$
$$= \pi R^2 - \pi r^2 + 2\pi Rh + 2\pi rh + \frac{1}{2} * 4\pi R^2 + \frac{1}{2} * 4\pi r^2 = \pi(R^2 - r^2 + 2Rh + 2rh + 2R^2 + 2r^2)$$
$$= \pi\big(3R^2 + r^2 + 2h(R + r)\big) = \pi\big(3(4cm)^2 + (1cm)^2 + 2(4cm)(5cm)\big)$$
$$= \pi(48cm^2 + 1cm^2 + 40cm^2) = \pi(89cm^2) = 279{,}6cm^2$$

3. Aufgabe
Die Mittlere Pyramide der Pyramiden von Gizeh (die Chephren-Pyramide) war ursprünglich 143,5 m hoch und hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge a = 215,25m. Berechne das Volumen und die sichtbare Oberfläche.

$$h = 143{,}5m\ ; a = 215{,}25m$$
$$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3} * (215{,}25m)^2 * 143{,}5m = 2216240m^3$$
$$h_{Dreieck} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} * 215{,}25m\right)^2 + (143{,}5m)^2} = 179{,}375m$$
$$O = 4 * \frac{1}{2}ah_{Dreieck} = 2 * (215{,}25m) * (179{,}375m) = 77221m^2$$

4. Aufgabe
Alle Kanten eines Prismas mit gleichmäßiger 6-eckiger Grundfläche haben alle die Länge l = 5 cm. Berechne die Oberfläche dieses Prismas und sein Volumen. Fertige hierzu eine Zeichnung der Grundfläche an.





$$h_{Dreieck} = \sqrt{l^2 - (\frac{1}{2}l)^2} = 4{,}33cm$$
$$G = 6 * \frac{1}{2}lh = 3 * 5cm * 4{,}33cm = 64{,}95cm^2$$
$$V = Gl = 64{,}95cm^2 * 5cm = 342{,}76cm^3$$
$$O = 2G + 6l^2 = 2 * 64{,}95cm^2 + 6 * (5cm)^2 = 129{,}9cm^2 + 150cm^2 = 279{,}9cm^2$$

5. Aufgabe

Eine zylindrische Getränkedose aus Aluminium hat ein Verhältnis von Höhe zu Durchmesser von 1,76. D.h. beträgt der Durchmesser 8 cm, so ist die Höhe 14,08 cm. Eine solche Dose soll ein Volumen von 250 ml (=250 cm^3) haben.

a) Stelle einen Rechenausdruck für das Volumen auf, der nur den Durchmesser d enthält.

$$h = 1{,}76d; r = \frac{1}{2}d$$
$$V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{1}{2}d\right)^2 1{,}76d = 0{,}44\pi d^3$$

b) Welche Höhe und welchen Durchmesser muss die Dose haben?

$$d = \sqrt[3]{\frac{V}{0{,}44\pi}} = \sqrt[3]{\frac{250cm^3}{0{,}44\pi}} = 5{,}66cm$$
$$h = 1{,}76d = 1{,}76 * 5{,}66cm = 9{,}95cm$$

6. Aufgabe

Ein Holzspielzeug besteht aus einer Halbkugel und einem Kegel aus Eichenholz (siehe Bild). Berechne das Volumen und die Oberfläche.

$$V = V_{Kegel} + \frac{1}{2}V_{Kugel} = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi(r^2 h + 2r^3) = \frac{1}{3}\pi((3c$$
$$= \frac{1}{3}\pi(90cm^3 + 54cm^3) = \frac{1}{3}\pi * 144cm^3 = \pi * 48cm^3 = 150{,}8cm^3$$

$$s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(3cm)^2 + (10cm)^2} = 10{,}44cm$$
$$O = M + \frac{1}{2}O_{Kugel} = \pi r s + 2\pi r^2 = \pi * 3cm * 10{,}44cm + 2 * \pi * (3c$$
$$= 98{,}40cm^2 + 56{,}55cm^2 = 154{,}95cm^2$$