Merke:

$d = 2 \cdot r$

$U = 2\pi \cdot r$

$O = 4\pi \cdot r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

Aufgabenblatt Kugel - Lösungen

r := Radius; d := Durchmesser; U := Umfang; O := Oberfläche; V := Volumen

1. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche der Kugeln mit folgenden Eigenschaften:

a) r = 7cm

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (7cm)^3 = 1436{,}8cm^3$$

$$O = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot (7cm)^2 = 615{,}8cm^2$$

b) d = 2m

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{d}{2})^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{2m}{2})^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (1m)^3 = 4{,}189m^3$$

$$O = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot (\frac{d}{2})^2 = 4\pi \cdot (\frac{2m}{2})^2 = 4\pi \cdot (1m)^2 = 12{,}57m^2$$

c) U = 5 dm

$$U = 2\pi \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{U}{2\pi}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{U}{2\pi})^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{5dm}{2\pi})^3 = 2{,}111dm^3$$

$$O = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot (\frac{U}{2\pi})^2 = 4\pi \cdot (\frac{5dm}{2\pi})^2 = 7{,}958dm^2$$

2. Eine Kugel habe die Oberfläche 3dm².

a) Geben Sie Formeln an, die den Durchmesser und das Volumen einer beliebigen Kugel nicht mehr in Abhängigkeit von r sondern von O angeben.

$r > 0$

$$O = 4\pi \cdot r^2 \Leftrightarrow \frac{O}{4\pi} = r^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{O}{4\pi}} = r \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$$

$$d = 2 \cdot r = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}} = \sqrt{\frac{O}{\pi}}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}})^3 = \frac{4 \cdot \pi\sqrt{O^3}}{3 \cdot 8\sqrt{\pi^3}} = \frac{\sqrt{O^3}}{6\sqrt{\pi}}$$

b) Berechnen Sie den Durchmesser und das Volumen der Kugel mithilfe der Formeln aus a).

$$d = \sqrt{\frac{O}{\pi}} = \sqrt{\frac{3dm^2}{\pi}} = 0{,}977dm = 9{,}77cm$$

$$V = \frac{\sqrt{O^3}}{6\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{(3dm^2)^3}}{6\sqrt{\pi}} = 0{,}489dm^3 = 489cm^3$$

3. Eine Kugel habe das Volumen 1m³. Berechnen Sie Radius und Oberfläche dieser Kugel.

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \Leftrightarrow \frac{3V}{4\pi} = r^3 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1m^3}{4\pi}} = 0{,}62m = 62cm$$

$$O = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot (\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}})^2 = 4\pi \cdot (\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1m^3}{4\pi}})^2 = 4{,}836m^2$$

4. Die Erde sei eine Kugel der Masse m = $6*10^{24}$kg mit dem Durchmesser 12730km.
   a) Berechnen Sie das Volumen.
   $$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{d}{2})^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{12730km}{2})^3 = 1080149411282km^3$$
   b) Berechnen Sie die Oberfläche.
   $$O = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot (\frac{d}{2})^2 = 4\pi \cdot (\frac{12730km}{2})^2 = 509104200km^2$$
   c) Die mittlere Dichte eines Körpers wird mit der Formel $\rho = \frac{m}{V}$ berechnet.

   Bestätigen Sie die mittlere Dichte der Erde von ca. $5{,}555\frac{g}{cm^3}$.
   $$\rho = \frac{m}{V} = \frac{6 \cdot 10^{24}kg}{1080149411282km^3} = 5554787085315\frac{kg}{km^3} =$$
   $$5554787085315\frac{10^3g}{10^{15}cm^3} = 5{,}555\frac{g}{cm^3}$$

5. Eine Glaskugel habe den Durchmesser 15 cm. Berechnen Sie mit der Formel aus 4c) die Masse der Kugel. ($\rho_{Glas} = 2500\frac{kg}{m^3}$)

   $15cm = 0{,}15m$

   $$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{d}{2})^3$$

   $$\rho = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho \cdot V$$

   $$m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{d}{2})^3 = 2500\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{0{,}15m}{2})^3 = 4{,}42kg$$

6. Finden Sie ein x für das folgende Aussagen gelten:
   a) $V = O \cdot xm$ [m = Meter]

$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3, O=4\pi\cdot r^2$$

$$V=O\cdot xm$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi\cdot r^3=4\pi\cdot r^2\cdot xm$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}r=4\cdot xm$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{r}{3m}$$

b) $\sqrt[3]{V}=\sqrt[2]{O}\cdot x$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt[2]{O}}=x$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi\cdot r^3}}{\sqrt[2]{4\pi\cdot r^2}}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}}{\sqrt[2]{4\pi}}$$

c) Für welches Paar (x, r) gelten a) und b)?

$$x=\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}}{\sqrt[2]{4\pi}}, x=\frac{r}{3m}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{3m}=\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}}{\sqrt[2]{4\pi}}$$

$$\Rightarrow r=\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}}{\sqrt[2]{4\pi}}\cdot 3m$$

$$(x,r)=(\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}}{\sqrt[2]{4\pi}},\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}}{\sqrt[2]{4\pi}}\cdot 3m)$$

d) Zeigen Sie: Es existiert kein r>0, so dass gilt: $U=\sqrt[3]{V}$

Beweis durch Widerspruch:

Es sei:

$$U = \sqrt[3]{V}$$
$$\Leftrightarrow 2\pi \cdot r = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi \cdot r^3}$$
$$\Leftrightarrow 2\pi \cdot r = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi} \cdot r$$
$$\Leftrightarrow 2\pi = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}$$
Widerspruch!

■

7. Eine Kugel soll sich komplett in einem Würfel befinden.
   a) Geben Sie eine Formel an, mit der man das Volumen des kleinstmöglichen Würfels in Abhängigkeit des Volumens der Kugel berechnen kann.
   $$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$
   $$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V_{Kugel}}{4\pi}}$$
   $$a = 2 \cdot r$$
   $$V_{Würfel} = a^3 = (2 \cdot r)^3 = 8\frac{3V_{Kugel}}{4\pi} = \frac{6 \cdot V_{Kugel}}{\pi}$$
   b) Verfahren Sie genauso mit den beiden Oberflächen
   $$O_{Kugel} = 4\pi \cdot r^2$$
   $$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{O_{Kugel}}{4\pi}}$$
   $$a = 2 \cdot r$$
   $$O_{Würfel} = 6a^2 = 6 \cdot (2 \cdot r)^2 = 24\frac{O_{Kugel}}{4\pi} = \frac{6 \cdot O_{Kugel}}{\pi}$$
   c) Eine Kugel habe den Durchmesser 1m. Berechnen Sie zunächst Oberfläche und Volumen der Kugel und anschleißend Oberfläche und Volumen des Würfels.
   $$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{d}{2})^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{1m}{2})^3 = \frac{\pi}{6}m^3$$
   $$O_{Kugel} = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot (\frac{d}{2})^2 = 4\pi \cdot (\frac{1m}{2})^2 = \pi m^2$$
   $$V_{Würfel} = \frac{6 \cdot V_{Kugel}}{\pi} = \frac{6 \cdot \frac{\pi}{6}m^3}{\pi} = 1m^3$$
   $$O_{Würfel} = \frac{6 \cdot O_{Kugel}}{\pi} = \frac{6 \cdot \pi m^2}{\pi} = 6m^2$$

8. Ein Ball habe einen Umfang von 70 cm. 80% des Volumens seien mit Luft gefüllt. 20% des Volumens bilden die Schale des Balles. Berechnen Sie:
   a) den Außenradius

$U = 2\pi \cdot r$

$\Leftrightarrow r = \dfrac{U}{2\pi}$

$\Rightarrow r = \dfrac{70cm}{2\pi} = 11{,}14cm$

b) das gesamte Volumen

$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot (\dfrac{70cm}{2\pi})^3 = 5792cm^3$

c) die äußere Oberfläche

$O = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot (\dfrac{70cm}{2\pi})^2 = 1560cm^2$

d) den Innenradius

$V_{Ges} = 5792cm^3$

$V_{Innen} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r_{Innen}{}^3 = 80\% \cdot 5792cm^3$

$\Rightarrow r_{Innen} = \sqrt[3]{\dfrac{80\% \cdot 5792cm^3 \cdot 3}{4\pi}} = 10{,}34cm$

e) die innere Oberfläche

$O = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot (10{,}34cm)^2 = 1343{,}5cm^2$